آمادگی برای المپیاد ریاضی



هندسهٔ مسطحه

مقدمه‌ای برهندسهٔ نوین
مثلث ودایره

تألیف ناتان آلتشیلرکورت

ترجمهٔ محمود دیانی



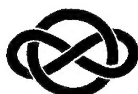
بخش اصلی کتاب **هندسهٔ مسطحه** از مباحث مربوط به مثلث ودایره تشکیل می‌شود. سطح مطالب فراتر از هندسهٔ دبیرستانی است ودر واقع می‌تواند ادامهٔ درس هندسهٔ دبیرستان به حساب آید. به همین دلیل این کتاب برای افراد علاقه‌مند به هندسه وکسانی که‌خود را برای‌امتحانهایی از نوع المپیادهای ریاضی آماده می‌کنند، بسیار مفید است.

کتاب به رغم کمیِ حجم، مطالب وسیعی را در بردارد. دراین کتاب پس ازبررسی همهٔ مطالب کلاسیک مربوط به مثلث ودایره (تشابه، تجانس، دایره‌های سه‌مماس، دایرهٔ نه نقطه، موربها، خط سیمسون، تقسیم توافقی، مسئلهٔ آپولونیوس وغیره)، بخشهایی نیزبه یافته‌های‌نوین‌درمورد دایره ومثلث اختصاص یافته است.

تعداد مسائل کتاب آنقدر زیاد است که‌می‌تواند افرادی را که به پرورش قوای فکری‌خود علاقه‌مندند، مدتها سرگرم کند.

هندسهٔ مسطحه از کتابهای دستهٔ دوم مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی(کتابهای نارنجی) است.

آمادگی برای المپیاد ریاضی



هندسهٔ مسطحه

مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین
مثلث و دایره

تألیف   ناتان آلتشیلر کورت

ترجمهٔ   محمود دیانی

زیر نظر :

یحیی تابش

عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف

عضو کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی

امید علی کرمزاده

عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران (اهواز)

عضو کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی



College Geometry
An Introduction To The Modern Geometry Of The Triangle And The Circle
Nathan Altshiller Court
Barnes & Noble, Inc.

هندسهٔ مسطحه/ مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره

مؤلف: ناتان آلتشیلر کورت
مترجم: محمود دیانی
ویراستار: مهران اخباریفر
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ چهارم، ۱۳۸۴
شابک ۳ـ۲۲۲ـ۳۱۸ـ۹۶۴
ISBN 964-318-222-3
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
طرح جلد: زهرا قورچیان، آتلیهٔ مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ خاشع



مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۸۸۹۶۱۴۲۲ ـ ۸۸۹۶۴۷۷۰ نمابر: ۸۸۹۵۶۲۵۸
info@fatemi.ir

آلتشیلر-کورت، ناتان، ۱۸۸۱ ـ
Altshiller-Court, Nathan
هندسهٔ مسطحه: مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره / تألیف ناتان آلتشیلر کورت؛ ترجمهٔ محمود دیانی؛ ویراستار مهران اخباریفر. ـــ تهران: فاطمی، ۱۳۷۶.
۲۶۱ ص.: مصور. ـــ (مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی).
ISBN 964-318-222-3
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: College geometry: an introduction to the modern geometry of the triangle and the circle.
واژه‌نامه.
نمایه.
چاپ چهارم: ۱۳۸۴.
۱. هندسهٔ مسطحهٔ جدید. ۲. مثلث. ۳. دایره. الف. دیانی، محمود، ۱۳۳۹ـ ، مترجم. ب. عنوان.
QA۴۷۴/آ۷ه۹ ۵۱۶/۲۲
کتابخانهٔ ملی ایران م۷۶ـ۲۲۵۵

فهرست

به‌نام خدا

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: عمومی کردن ریاضیات، و تربیت نخبگان. هدف اول از آن رو اهمیت دارد که در آستانهٔ قرن بیست‌ویکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی پیشرفتهای بیشتری در این جهت باشیم و ابزارهای جدیدی را برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوهٔ جامعهٔ خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنهٔ عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از جهت علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است، از این رو آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر المپیاد ریاضی اهمیت ویژه‌ای برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها داراست.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقهٔ اتووش به نام بارون لوراند اتووش[1] به صورت یک مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به خاطر سادگی مفاهیم به‌کار گرفته شده، هنوز هم جذاب است. پس از آن طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا این که در سال ۱۹۵۹، رومانی پیشگام راه‌اندازی المپیاد بین‌المللی ریاضی شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگر نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است، اولین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیّت دارد توانایی حل مسئله است، ولی باید توجه داشت که حل یک

1. Baron Loránd Eötvös

مسئلهٔ با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید. بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری نشان می‌دهند.

بدیهی است که این تلاشها اگر با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو **مؤسسهٔ انتشارات فاطمی** به انتشار مجموعهٔ **آمادگی برای المپیاد ریاضی** اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتابهای زرد) شامل کتابهای مقدماتی با پیشنیاز ریاضی ۲ نظام جدید است و شامل کتابهایی در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز، و جبر است.

دستهٔ دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعهٔ مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دستهٔ سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته در زمینهٔ المپیاد ریاضی است.

مجموعهٔ **آمادگی برای المپیاد ریاضی** مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

* * *

کتاب حاضر از دستهٔ دوم است که در زمینهٔ هندسهٔ مسطحه یکی از منابع اصلی المپیاد ریاضی در سطح جهان به‌شمار می‌رود.

سخنی با خواننده

متن. برخی اوقات کسانی که در هنر اثبات ریاضی مبتدی هستند، تصور می‌کنند که حافظه در ریاضیات نقشی ندارد. اینان بر این باورند که نتایج ریاضی از استدلال حاصل می‌شوند، و همیشه می‌توان این نتایج را با استدلال مناسب دوباره به‌دست آورد. روشن است که چنین عقیده‌ای کوته‌نظرانه است. برهان ریاضی هر گزاره، کوششی است برای نشان دادن اینکه این گزارهٔ جدید نتیجه‌ای از تعریفها و قضیه‌هایی است که قبلاً اعتبارشان پذیرفته شده است. اگر شخص استدلال کننده گزاره‌های مناسبی را در ذهن نداشته باشد، کاری که پیش‌رو دارد اگر ناممکن نباشد، بسیار دشوار است.

دانش‌آموزی که مطالعهٔ این کتاب را آغاز می‌کند باید کتابهای هندسهٔ دورهٔ دبیرستان را در دسترس داشته باشد. هرگاه در کتاب حاضر، به‌طور ضمنی یا صریح، به گزاره‌ای از هندسهٔ مقدماتی ارجاع می‌شود، دانش‌آموز باید گزارهٔ مورد نظر را بیابد و بیان دقیق آن را در دفتری که به‌همین منظور تهیه کرده است یا در حاشیهٔ کتاب، یادداشت کند. بهتر است در حاشیهٔ کتاب هندسهٔ مقدماتی نیز گزاره‌هایی که در کتاب حاضر به آنها ارجاع شده است، مشخص شوند.

در جای جای این کتاب به بخشهای قبلی ارجاع شده است. مثلاً در بند ۱۸۹ به بند ۷۳ ارجاع شده است. وقتی بند ۱۸۹ را می‌خوانید بهتر است در حاشیه بند ۷۳ این مطلب را یادداشت کنید. این گونه سیستم ارجاع به مطالب بعدی در دوره‌کردن مطلب سودمند است و ممکن است موجب شود که مطالب کتاب با سهولت بیشتری فهمیده شوند.

شکلها. اگر دانش‌آموز هنگام مطالعهٔ کتاب شخصاً شکلها را رسم کند و برای هر گزاره شکل جداگانه‌ای بکشد، بهرهٔ فراوانی خواهد برد. در بیشتر موارد طرح خامی که فقط با دست رسم می‌شود، کفایت می‌کند. وقتی که شکل پیچیده‌تری مورد نیاز است، می‌توان این شکل را در کتاب به‌عنوان راهنمایی برای ایجاد نظم در بین اجزا و عناصر مسئله مدّنظر قرار داد. این نوع تمرینها گزاره‌ها را در ذهن خواننده تثبیت می‌کنند.

تمرینها. معمولاً تمرینها در ریاضیات دو هدف را دنبال می‌کنند. خواننده با انجام تمرینها میزان تسلط خود را بر مطالبی که مطالعه کرده است محک می‌زند و نیز این فرصت را می‌یابد که با اِعمال روشهای عرضه شده در کتاب، توانایی خود را در به کارگیری این مطالب بسنجد.

ناگفته روشن است که اگر دانش‌آموز نداند مسئله‌ای را که می‌خواهد حل کند چیست، احتمالاً نمی‌تواند آن را حل کند. حتی تصور اینکه کسی خلاف این نظر را داشته باشد، مضحک است. اما تجربه نشان می‌دهد که ممکن است تأکید بر این نکته سودمند باشد. ما کار حل مسئله را با گزاره‌های ساده‌ای آغاز می‌کنیم که در درک محتوایشان تردیدی نداریم. وقتی که به مرور زمان شرایط به‌طور قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌کند، بنابر عادت، فرض می‌کنیم که فوراً بیان مسئله را فهمیده‌ایم.

مسائل کتاب حاضر نیز همانند مسائل بسیاری از کتابهای هندسه، توصیفی‌اند. به هر حال، اگر چه

ممکن است شگفت‌انگیز به نظر برسد، ولی غالباً درک مفهوم یک مسئلهٔ مفروض کار دشواری است و اغلب لازم است که کم و بیش برای درک معنی آن تلاش کنیم. روشن است که چنین تلاشی باید در ابتدای کار و پیش از برداشتن هر گامی برای حل مسئله صورت گیرد. در واقع، ممکن است تسلط پیدا کردن بر معنی مسئله، بخشی اساسی و اغلب دشوارترین بخش حل مسئله باشد.

دانش‌آموز باید برای حصول اطمینان از درک مسئله، صورت آن را بدون استفاده از کتاب تکرار کند، یا بهتر آن است که صورت مسئله را از حفظ بنویسد. گذشته از این، باید معنی جمله‌هایی را که نوشته یا بیان شده‌اند به‌قدری خوب بداند که بتواند با بیان خود، مسئله را برای کسی که اطلاعات لازم را دارد اما قبلاً هرگز صورت مسئله را نشنیده است، شرح دهد.

سرانجام، ترسیم شکل مربوط به مسئله امری ضروری است. معمولاً شکل ساده‌ای که فقط با دست رسم شود، کفایت می‌کند. در بعضی موارد، ممکن است شکل دقیق بسیار الهام‌بخش باشد.

روشن است که هیچ قاعدهٔ مطمئنی که منجر به حل همهٔ مسائل شود، وجود ندارد. وقتی که دانش‌آموز از معنی مسئله اطمینان حاصل کرده باشد، فهرست دقیقی از عناصر مفروض و عناصر مطلوب مسئله تهیه کرده و شکل مناسبی پیش‌رو داشته باشد، ابزارهای کافی را برای حمله به مسئله در اختیار دارد و با چنین تجهیزاتی می‌تواند با سرسخت‌ترین مسائل نیز دست و پنجه نرم کند.

دانش‌آموز نباید انتظار داشته باشد که همواره بتواند به محض خواندن صورت مسئله، راه‌حل آن را بیابد. اگر چنین باشد، که گاهی هم هست، چه بهتر از این. اما در بیشتر موارد، برای حل کردن مسئله بیش از هر چیز صبر و حوصله لازم است. اگر چند بار شروع به حل مسئله کردید و موفق نشدید، دلسرد نشوید، زیرا مسائل ریاضی خصلتاً این‌طور هستند. کسی در حل مسأله موفق است که هنگام روبه‌رو شدن با موانع، عزم و اراده بیشتری در از میان برداشتن آنها از خود نشان دهد. در این صورت، هنگامی که نور امید جلوه‌گر می‌شود و به مقصود دست می‌یابید، پاداشی مسرت‌بخش از احساس پیروزی و موفقیت نصیبتان خواهد شد.

۱

ترسیمهای هندسی

الف. مقدمات

۱. نمادگذاری. نمادهای زیر را اغلب به کار خواهیم برد:

A، B، C، ... برای نشان دادن رأسها و زاویه‌های متناظر آنها در چندضلعی؛

a، b، c، ... برای نشان دادن اضلاع چندضلعی (در مثلث، هر ضلع و زاویهٔ روبه‌رویش را با یک حرف نشان می‌دهیم منتها ضلع را با حرف کوچک و زاویه را با حرف بزرگ)؛

$2p$ برای نشان دادن محیط مثلث؛

h_a، h_b، h_c برای نشان دادن ارتفاعها و m_a، m_b، m_c برای نشان دادن میانه‌های متناظر با اضلاع a، b، و c در مثلث ABC؛

t_a، t_b، t_c برای نشان دادن نیمسازهای داخلی زاویه‌های A، B، و C و t'_a، t'_b، t'_c برای نشان دادن نیمسازهای خارجی آنها؛

R، r برای نشان دادن شعاع دایره‌های محیطی و محاطی؛

(A, r) برای نشان دادن دایره‌ای به مرکز A که پاره‌خط r شعاع آن است؛

$M = (PQ, RS)$ برای نشان دادن اینکه M نقطهٔ تلاقی دو خط PQ و RS است.

۲. ترسیمهای اصلی. ترسیمهای زیر را اغلب به کار خواهیم گرفت:

تقسیم یک پاره‌خط به چند بخش مساوی به تعداد معین.

تقسیم یک پاره‌خط به نسبت مفروض به صورت (i) داخلی؛ (ii) خارجی (§۵۴).

ترسیم پاره‌خطی که با سه پاره‌خط مفروض یک تناسب تشکیل دهد.

ترسیم واسطهٔ هندسی دو پاره‌خط مفروض.

ترسیم مربعی هم‌ارز با (i) مستطیل مفروض؛ (ii) مثلث مفروض.

ترسیم مربعی هم‌ارز با مجموع دو، سه، یا چند مربع مفروض.

ترسیم دو پاره‌خط که مجموع و تفاضلشان مفروض باشد.

ترسیم مماس از نقطه‌ای بر دایره.

ترسیم مماس مشترکهای داخلی و خارجی دو دایرهٔ مفروض.

تمرین

مثلثی رسم کنید که سه جزءِ زیر از آن مفروض باشند:

۱) c, b, a ۲) a, b, C ۳) a, B, C ۴) a, h_a, B

۵) a, b, m_a ۶) a, B, t_b ۷) A, h_a, t_a

مثلث قائم‌الزاویه‌ای، با زاویهٔ قائمهٔ A، را با مفروض بودن اجزای زیر از آن رسم کنید:

۸) B, a　　۹) b, C　　۱۰) b, a　　۱۱) b, c

متوازی الاضلاع $ABCD$ را با مفروض بودن اجزای زیر از آن رسم کنید:

۱۲) AB, BC, AC　　۱۳) B, AC, AB　　۱۴) $\angle ABD, BD, AB$

چهارضلعی $ABCD$ را با مفروض بودن اجزای زیر از آن رسم کنید:

۱۵) AD, AB, C, B, A　　۱۶) C, B, CD, BC, AB　　۱۷) CD, AD, C, B, A

۱۸) دایره‌ای با شعاع مفروض رسم کنید که در نقطهٔ مشخصی بر (i) خطی مفروض؛ (ii) دایره‌ای مفروض، مماس باشد.

۱۹) دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و (i) شعاع آن مفروض باشد؛ (ii) مرکز آن روی خط مفروضی قرار داشته باشد.

۲۰) مماسی با راستای مفروض بر یک دایرهٔ مفروض رسم کنید.

۲۱) پاره‌خط مفروضی را به طور داخلی و خارجی به نسبت مربعهای دو پاره‌خط مفروض p و q تقسیم کنید. (راهنمایی: اگر AD بر وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC عمود باشد، آنگاه $AB^2 : AC^2 = BD : DC$.)

۲۲) مثلث قائم‌الزاویه‌ای را رسم کنید که وتر و نسبت مربعهای دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن مفروض است.

۲۳) پاره‌خطهای a، p، و q مفروض‌اند. پاره‌خط x را طوری رسم کنید که داشته باشیم $x^2 : a^2 = p : q$.

۲۴) مثلث قائم‌الزاویه‌ای را هم‌ارز با مثلث مفروضی رسم کنید.

۳. پیشنهاد. اکثر مسائل بالا با استفاده از نمادهای قراردادی بیان شده‌اند. بیان این مسائل با کلمات بسیار آموزنده است. مثلاً، تمرین ۴ را می‌توان به این‌صورت بیان کرد: مثلثی رسم کنید که قاعده، ارتفاع متناظر با آن قاعده و یکی از دو زاویهٔ قاعدهٔ آن مفروض باشد.

ب. روش عمومی حل مسائل ترسیمی

۴. روش تحلیلی. بعضی از مسائل ترسیمی کاربرد مستقیم قضیه‌های معروفی هستند و راه‌حل آنها تقریباً واضح است. مثال: یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم کنید.

اگر حل مسئله‌ای پیچیده‌تر باشد، با این حال راه حل را بدانید، این راه‌حل را می‌توان به این طریق ارائه کرد: از یک عمل که می‌دانید چگونه انجام دهید شروع کنید، و به دنبال آن رشته‌ای از این‌گونه عملیات را بیان کنید تا به هدف برسید.

این شیوه روش سازندهٔ حل مسئله نام دارد. این روشی است که در کتابها برای بیان حل مسائل به کار می‌رود.

ولی اگر با مسئله‌ای روبه‌رو شوید که حل آن واضح نباشد، نمی‌توانید این شیوه را دنبال کنید. زیرا هیچ سرنخی وجود ندارد که اولین گام ممکن است چه باشد، و تعداد عملهایی که ممکن است به عنوان اولین گام انتخاب شوند آن‌قدر زیاد است که نمی‌توان آنها را به طور تصادفی آزمود.

از طرف دیگر، مشخصاً می‌دانیم که مسئله چیست، یعنی می‌دانیم که نهایتاً باید چه شکلی را به دست آوریم. بنابراین شروع از این شکل نهایی، که فرض می‌کنیم قبلاً رسم شده است، مفید است. با بررسی دقیق و سنجیدهٔ این شکل ممکن است راهی را کشف کنیم که به حل مطلوب منجر شود. این شیوه را روش تحلیلی حل مسئله می‌نامند. این روش به طور خلاصه شامل گامهای زیر است:

تحلیل. فرض کنید مسئله حل شده است؛ شکلی رسم کنید که تقریباً شرایط بیان شده در مسئله را ارضا کند؛ بررسی کنید که بین بخشهای مفروض و بخشهای نامعلوم در شکل چه ارتباطی وجود دارد، تا رابطه‌ای را کشف

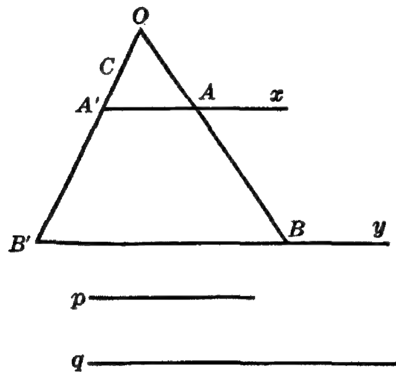
کنید که احتمالاً بتوان برای ترسیم شکل موردنظر به‌کار برد.

ترسیم. شکل خواسته شده را بااستفاده از اطلاعات به دست آمده در تحلیل رسم کنید.

اثبات. نشان دهید که شکل رسم شده تمامی شرایط را ارضا می‌کند.

بحث. در مورد شرایط امکان ترسیم شکل خواسته شده، تعداد جوابها و غیره بحث کنید.

۵. مسئله. دو نقطهٔ A و B روی دو خط موازی مفروض x و y مشخص شده‌اند. از نقطهٔ مفروض C، که روی هیچ‌کدام از این خطها قرار ندارد، قاطع $CA'B'$ را، طوری رسم کنید که خطهای x و y را در نقاط A' و B' قطع کند و پاره‌خطهای AA' و BB' با دو پاره‌خط مفروض p و q متناسب باشند.



شکل۱

تحلیل. فرض کنید $CA'B'$ خط مطلوب باشد، به طوری که (با توجه به شکل ۱)

$$AA' : BB' = p : q$$

فرض کنید $O = (AB, A'B')$. دو مثلث OAA' و OBB' متشابه‌اند، پس

$$AO : BO = AA' : BB'$$

نسبت دوم معلوم است؛ پس نقطهٔ O پاره‌خط معلوم AB را به نسبت مفروض $p : q$ تقسیم می‌کند. پس می‌توانیم O را رسم کنیم و OC خط مطلوب است.

ترسیم. نقطهٔ O را طوری رسم می‌کنیم که

$$AO : BO = p : q$$

نقاط O و C خط مطلوب را تعیین می‌کنند.

اثبات. به خواننده واگذار می‌شود.

بحث. دو نقطه، O و O'، وجود دارد که پاره‌خط AB را به نسبت $p : q$ تقسیم کند، یکی داخلی و یکی خارجی، و همیشه می‌توانیم این دو نقطه را رسم کنیم؛ بنابراین اگر هیچ‌کدام از خطهای CO و CO' با خطهای مفروض x و y موازی نباشند، مسئله دو جواب دارد.

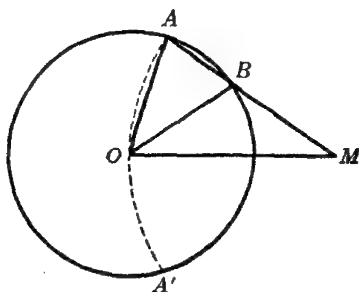
حالتی را که $p = q$ در نظر بگیرید.

۶. مسئله. از نقطه‌ای مفروض در خارج دایره‌ای مفروض قاطعی رسم کنید به‌طوری که زاویهٔ حادهٔ بین این قاطع و خطی که مرکز دایره را به نقطهٔ مفروض وصل می‌کند برابر باشد با زاویه‌ای که وتر ایجاد شده در دایره توسط قاطع مطلوب، از مرکز دایره به آن زاویه دیده می‌شود.

تحلیل. فرض کنید MBA قاطع مورد نظر باشد(شکل ۲) که از نقطهٔ مفروض M می‌گذرد و دایرهٔ مفروض به مرکز O را در A و B قطع می‌کند. زاویهٔ A در دو مثلث AOB و AOM مشترک است و بنابر فرض $\angle AOB = \angle AMO$؛ پس زاویه‌های این دو مثلث دوبه‌دو مساوی‌اند. مثلث AOB متساوی‌الساقین است، پس مثلث AOM هم متساوی‌الساقین است و $MA = MO$. اما طول MO معلوم است؛ پس MA، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ A از M معلوم است و می‌توان نقطهٔ A را تعیین و قاطع MA را رسم کرد.

ترسیم. دایرهٔ (M, MO) را رسم کنید. اگر A یکی از نقطه‌های تقاطع دو دایره باشد، خط MA شرایط مسئله را برآورده می‌کند.

اثبات. فرض کنید خط MA دایرهٔ مفروض را در نقطهٔ دیگر B قطع کند. مثلثهای AOB و AOM متساوی‌الساقین‌اند. زیرا OA و OB شعاعهای یک دایره، و MA و MO نیز شعاعهای دایرهٔ دیگرند. و در نتیجه، $OA = OB$ و $MA = MO$. زاویهٔ A در هر دو مثلث یکی از زاویه‌های قاعده است؛ پس زاویه‌های AOB و M که به ترتیب روبروی قاعدهٔ AB و قاعدهٔ AO در دو مثلث متساوی‌الساقین هستند نیز برابرند. پس MA خط مطلوب است.



شکل۲

بحث. همیشه می‌توانیم دایرهٔ (M, MO) را که دایرهٔ مفروض را در دو نقطهٔ A و A' قطع می‌کند رسم کنیم؛ پس مسئله همیشه دو جواب دارد که نسبت به خط MO متقارن‌اند.

آیا می‌توانستیم خط MBA را طوری رسم کنیم که زاویهٔ AOB با زاویهٔ منفرجهٔ بین MBA و MO برابر باشد؟ اگر چنین کاری ممکن بود باید می‌داشتیم

$$\angle AOB + \angle OMA = ۱۸۰^\circ$$

که از آنجا،

$$\angle OMA = \angle OAB + \angle OBA$$

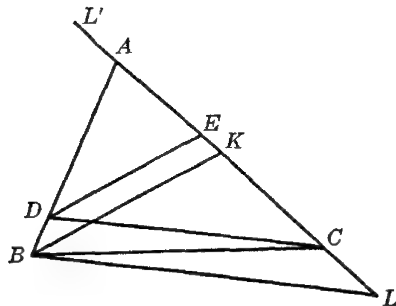
ولی در مثلث OBM داریم

$$\angle M < \angle OBA$$

پس به تناقض می‌رسیم؛ یعنی نمی‌توان خطی رسم کرد که شرایط خواسته شده را برآورده کند.

مسئله را در حالتی که M درون دایرهٔ مفروض یا بر روی آن باشد بررسی کنید.

۷. مسئله. بر روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC (یا امتداد آنها) دو نقطهٔ D و E را طوری تعیین کنید که پاره‌خطهای AD، DE و EC برابر باشند (شکل ۳).



شکل۳

تحلیل. فرض کنید نقاط D و E شرایط مسئله را ارضا کنند، و فرض کنید خطهایی که از نقطهٔ B به ترتیب به موازات خطهای DE و DC رسم می‌شوند، AC را در K و L قطع کنند. دو مثلث ADE و ABK متشابه‌اند و چون بنابر فرض، $AD = DE$ داریم $AB = BK$ و نقطهٔ K را به‌آسانی می‌توان تعیین کرد.

همچنین مثلثهای DEC و BKL متشابه‌اند و چون بنابر فرض، $DE = EC$ داریم $BK = KL$ و L هم معلوم‌است.

ترسیم. دایرهٔ (B, BA) را رسم کنید تا AC را در K قطع کند. دایرهٔ (K, BA) را رسم کنید تا AC را در L قطع کند. خطی که از C به موازات BL رسم می‌شود، خط AB را در نقطهٔ D، که اولین نقطهٔ مطلوب است، قطع می‌کند و خطی که از D به موازات BK رسم می‌شود AC را در دومین نقطهٔ مطلوب، یعنی E، قطع می‌کند.

اثبات. گامهای اثبات همان گامهای تحلیل هستند ولی از آخر به اول.

بحث. همیشه یک و فقط یک موضع برای نقطهٔ K وجود دارد. پس از ترسیم K، برای L دو موضع می‌یابیم؛ بنابر این برای مسئله دو جواب DE و $D'E'$ وجود دارد.

اگر A قائمه باشد مسئله به یک مسئلهٔ بدیهی تبدیل می‌شود.

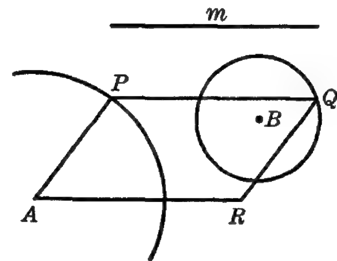
۸. مسئله. بر روی دو دایرهٔ مفروض، دو نقطه تعیین کنید که فاصلهٔ معینی از هم داشته باشند و خطی که از آنها می‌گذرد راستای مفروضی داشته باشد.

تحلیل. فرض کنید P و Q نقاط مطلوب بر روی دو دایرهٔ مفروض (A) و (B) باشند. از مرکز دایرهٔ (A) یعنی نقطهٔ A (شکل ۴) خطی به موازات PQ رسم کنید و نقطهٔ R را بر روی آن طوری مشخص کنید که $AR = PQ$. در متوازی‌الاضلاع $APQR$ داریم $RQ = AP$. AP شعاع دایرهٔ مفروض است؛ پس طول RQ مشخص است. از طرف دیگر نقطهٔ R معلوم است زیرا هم راستا و هم‌طول AR مشخص است. پس نقطهٔ Q را می‌توان مشخص کرد. سپس به آسانی می‌توان نقطهٔ P را یافت.

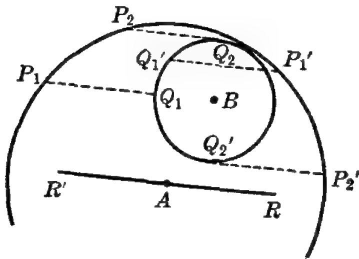
ترسیم. از A، مرکز یکی از دو دایرهٔ مفروض، (A)، خطی در راستای مفروض رسم کنید و AR را بر روی آن به‌اندازهٔ طول مفروض، m، تعیین کنید. دایرهٔ (A') را به مرکز R و شعاعی برابر شعاع دایرهٔ (A) رسم کنید تا دایرهٔ

مفروض دوم را در Q قطع کند. از نقطهٔ Q خطی به موازات AR رسم و QP را برابر AR روی آن جدا کنید، تا یک متوازی‌الاضلاع به ضلع AR (نه به قطر AR) درست شود. نقاط P و Q شرایط مسئله را برآورده می‌کنند.

اثبات. در ترسیم فوق، طول پاره‌خط PQ همان طول مفروض و راستای آن نیز راستای مفروض است. نقطهٔ Q روی دایرهٔ (B) قرار دارد. برای اینکه نشان دهیم نقطهٔ P روی دایرهٔ (A) قرار دارد کافی است متذکر شویم که در متوازی‌الاضلاع $ARQP$ داریم $AP = RQ$ و RQ طوری رسم شده است که با شعاع (A) برابر باشد.



شکل۴



شکل۵

بحث. همیشه می‌توان از نقطهٔ A خطی را در راستای مفروض رسم کرد. نقطهٔ R را می‌توان در هر یک از دو طرف A مشخص کرد؛ بنابراین برای R دو موضع، R و R' می‌توان یافت. دایره‌ای که مرکزش یکی از این دو نقطه و شعاعش برابر شعاع (A) باشد ممکن است (B) را در دو نقطه قطع کند، بر (B) مماس باشد یا اصلاً (B) را قطع نکند. بنابراین مسئله ممکن است چهار، سه، دو یا یک جواب داشته باشد، یا اصلاً جواب نداشته باشد.

شکل ۵ حالتی را نشان می‌دهد که مسئله چهار جواب دارد.

۹. مسئله. مربعی رسم کنید که هر ضلع، یا امتداد هر ضلع آن از نقطهٔ مفروضی بگذرد.

تحلیل. فرض کنید $PQRS$ مربعی است که اضلاع آن، یعنی PQ، QR، RS و SP به ترتیب از نقاط مفروض A، B، C و D می‌گذرند (شکل ۶).

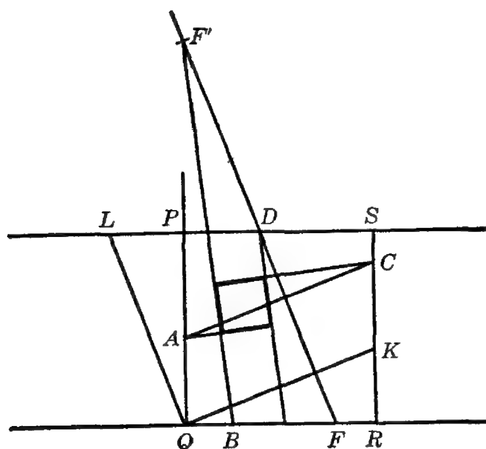
اگر خطی که از D بر AC عمود می‌شود خط QR را در F قطع کند، آنگاه $DF = AC$. در واقع اگر خط DFرا ثابت نگاه داریم و مربع، و به همراه آن خط AC را حول مرکزش به اندازهٔ 90° بچرخانیم به‌طوری که اضلاع PQ، QR، RS، SP به ترتیب در وضعیت فعلی اضلاع QR، RS، SP و PQ قرار گیرند، خط AC با DF موازی می‌شود؛ پس $AC = DF$.

برابری DF و AC را از راه دیگری هم می‌توان نشان داد. فرض کنید خطهایی که از Q به موازات AC و DF رسم می‌شوند، RS و SP را به ترتیب در نقطه‌های K و L قطع کنند. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ PQL و QRK داریم

$$\angle PQL = \angle LQR - \angle PQR = \angle LQR - \angle LQK = \angle KQR$$

پس زاویه‌های دو مثلث دوبه‌دو برابرند و چون بنابر فرض، $PQ = QR$، دو مثلث همنهشت‌اند؛ پس $QL = QK$. ولی $QL = DF$ و $QK = AC$؛ پس $AC = DF$.

برابری این دو پاره‌خط راه‌حل زیر را برای مسئله به ذهن می‌رساند:



شکل۶

ترسیم. از نقطهٔ مفروض D خط DF را بر خط معلوم AC عمود کنید و روی آن پاره‌خط DF را برابر AC جدا کنید. F را به نقطهٔ چهارم مفروض، یعنی B وصل و خطی از D به موازات BF رسم کنید. این دو خط موازی و خطهایی که از A و C بر آنها عمود می‌شوند مربع مطلوب $PQRS$ را تشکیل می‌دهند.

اثبات. از روش بیان شده در ترسیم به آسانی نتیجه می‌شود که $PQRS$ مستطیلی است که اضلاع آن از نقاط مفروض A، B، C و D می‌گذرند.

برای اینکه نشان دهیم این مستطیل مربع است، باز هم مثلثهای PQL و QRK را در نظر می‌گیریم، و مانند آنچه در تحلیل انجام دادیم نشان می‌دهیم که زاویه‌های این دو مثلث دوبه‌دو برابرند. حال همان‌طور که در ترسیم گفته شد $DF = AC$؛ پس $QL = QK$؛ پس مثلثها همنهشت‌اند و $QP = QR$.

بحث. اگر نقطهٔ F' را قرینهٔ F نسبت به D در نظر بگیریم و نقش F را به آن بدهیم، برای مسئله جواب دومی به دست خواهیم آورد.

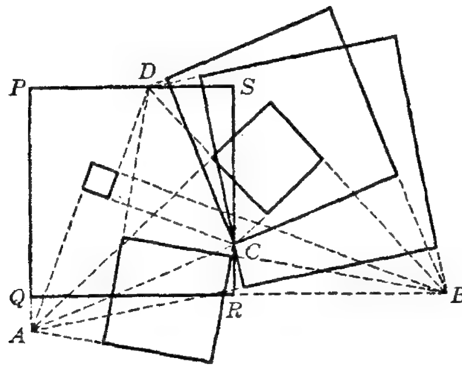
به‌علاوه، می‌توانیم از نقطهٔ D بر هر یک از دو ضلع دیگر مثلث ABC، یعنی AB و BC نیز عمود وارد کنیم، و به این ترتیب، دو جفت جواب دیگر به دست می‌آوریم. پس در حالت کلی مسئله ۶ جواب متفاوت دارد. البته تفاوتی ندارد که کدام‌یک از چهارنقطهٔ مفروض را نقطهٔ D فرض کنیم.

اگر نقطهٔ F بر نقطهٔ B منطبق شود، راستای BF نامعین خواهد بود، یعنی هر خطی را که از B می‌گذرد می‌توان ضلع مربع مطلوب در نظر گرفت و شکل را با این انتخاب تکمیل کرد. پس اگر پاره‌خطی که دو نقطه از چهار نقطهٔ مفروض را به هم وصل می‌کند بر پاره‌خطی که دو نقطهٔ دیگر را به هم وصل می‌کند عمود و با آن برابر باشد، مسئله بی‌نهایت جواب دارد.

شکل ۷ حالتی را نشان می‌دهد که مسئله شش جواب دارد.

۱۰. **پیشنهاد.** شکل لازم برای تحلیل را می‌توانید بدون استفاده از وسائل رسم کنید و اجزای مفروض را طوری ترتیب دهید که شکل تصور درستی را از مسئله القا کند و روابط بین اجزا را نشان دهد.

ترسیم باید با خط‌کش و پرگار انجام شود. اندازه‌های مفروض، مثل پاره‌خطها و زاویه‌ها باید قبل از شروع ترسیم مشخص شوند و در ترسیم به کار روند. اگر مسئله شامل نقاط و خطوطی در مواضع معین باشد، باید



شکل۷

قبل از شروع عملیات ترسیم این داده‌ها را در شکل مشخص کرد.

در هنگام بحث باید تعداد روشهای ممکن برای انجام هر گام و تعداد خطوط یا نقاط تلاقی حاصل از گام مورد نظر بررسی شود.

جنبه‌های مختلفی که مسئله می‌تواند داشته باشد، و در هنگام بحث روشن می‌شود، باید با شکلهای مناسب نشان داده شوند. به عنوان قاعده‌ای کلی، برای هر مسئله یا شکل امکاناتی بیشتر از آنچه در وهلهٔ اول به نظر می‌رسد وجود دارد. مطالعهٔ دقیق مسئله غالباً دیدگاههایی را روشن می‌سازد که در بررسی سرسری ممکن است از نظر دور بماند.

تمرین

۱) از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید که با دو ضلع زاویه‌ای مفروض، زاویه‌های مساوی بسازد.

۲) از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید که دو خط موازی مفروض روی آن پاره‌خطی با طول مشخص جدا کنند.

۳) از یکی از دو نقطهٔ تلاقی دو دایرهٔ مساوی در هر دایره یک وتر رسم کنید به‌طوری که دو وتر مساوی باشند و زاویهٔ مفروضی را تشکیل دهند.

۴) از نقطه‌ای مفروض واقع بر روی یک دایره وتری رسم کنید به‌طوری که طول آن دو برابر فاصله‌اش تا مرکز دایره باشد.

۵) روی امتداد قطری از یک دایرهٔ مفروض نقطه‌ای چنان بیابید که طول مماسهای رسم شده از آن نقطه بر دایره با شعاع دایره برابر باشد.

۶) به مرکز نقطه‌ای مفروض دایره‌ای رسم کنید که دایرهٔ مفروضی را نصف کند، یعنی وتر مشترک دو دایره قطر دایرهٔ مفروض باشد.

۷) دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و وتر مشترک آن با دایره‌ای مفروض موازی خطی مفروض باشد.

۸) متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که نقاط وسط سه ضلع آن، سه نقطهٔ مفروض باشند.

۹) بر روی یک ضلع مفروض زاویهٔ قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه نقطه‌ای بیابید که از رأس قائمه و وتر مثلث هم‌فاصله باشد.

۱۰) به مرکزهای دو نقطهٔ مفروض دو دایرهٔ مساوی رسم کنید به‌طوری که یکی از مماسهای مشترک آنها (i) از

نقطهٔ (سوم) مفروضی بگذرد؛ (ii) بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد.

۱۱) از یک نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید به‌طوری که دو وتری که توسط آن در دو دایرهٔ مفروض مساوی ایجاد می‌شود، مساوی باشند.

۱۲) بر دایرهٔ مفروضی که بین دو خط موازی قرار دارد مماسی رسم کنید به‌طوری که پاره‌خط جدا شده بر روی آن توسط دو خط موازی مفروض طول مفروضی داشته باشد.

۱۳) مثلث قائم‌الزاویه‌ای را رسم کنید که وتر و فاصلهٔ نقطهٔ وسط وتر تا یکی از دو ضلع زاویهٔ قائمه از آن مفروض است.

۱۴) مثلثی را رسم کنید که یک ارتفاع آن و شعاعهای دایره‌های محیطی دو مثلثی که این ارتفاع در مثلث مطلوب جدا می‌کند، مفروض است.

ج. مکانهای هندسی

۱۱ . مکانهای هندسی مهم. در موارد متعددی راه‌حل یک مسئلهٔ هندسی به یافتن نقطه‌ای که شرایط خاصی را داشته باشد بستگی دارد. مثلاً برای رسم دایره‌ای که از سه نقطهٔ مفروض بگذرد باید نقطه‌ای (مرکز دایره) را بیابیم که از سه نقطهٔ مفروض به یک فاصله باشد.

مسئلهٔ رسم یک مماس از یک نقطهٔ مفروض بر دایره‌ای مفروض، وقتی حل می‌شود که نقطهٔ تماس، یعنی نقطه‌ای بر روی دایره که پاره‌خط محدود به نقطهٔ مفروض و مرکز دایرهٔ مفروض از آن نقطه با زاویهٔ قائمه دیده شود، را بیابیم.

اگر یکی از شرایطی را که نقطهٔ مطلوب باید داشته باشد کنار بگذاریم، مسئله ممکن است جوابهای متعددی داشته باشد ولی این به معنی آن نیست که موضع نقطهٔ مطلوب دلخواه است، بلکه این نقطه روی مسیر معینی که مکان هندسی نقطه نام دارد حرکت می‌کند. حال با در نظر گرفتن شرط کنار گذاشته شده و کنار گذاشتن یک شرط دیگر، کاری می‌کنیم که نقطهٔ مورد نظر مکان هندسی دیگری را بپیماید. نقطه‌ای که بین این دو مکان هندسی مشترک باشد نقطه‌ای است که در جستجوی آن بوده‌ایم.

باز هم مسئلهٔ ترسیم دایره‌ای که از سه نقطهٔ مفروض بگذرد برای روشن کردن موضوع به‌کار می‌آید. برای یافتن نقطه‌ای که از سه نقطهٔ مفروض A، B، C هم‌فاصله باشد، یکی از نقاط مفروض، مثلاً C، را کنار می‌گذاریم و سعی می‌کنیم نقطه‌ای را بیابیم که از A و B هم‌فاصله باشد. این مسئله جوابهای بسیاری دارد؛ نقطهٔ مطلوب می‌تواند هر نقطه‌ای واقع بر عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. حال نقطهٔ C را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ A را کنار می‌گذاریم؛ نقطهٔ مطلوب عمودمنصف پاره‌خط BC را می‌پیماید. نقطهٔ مطلوب محل برخورد دو عمودمنصف است.

ماهیت مکانهای هندسی حاصل به شرط حذف شده بستگی دارد. در هندسهٔ مقدماتی این شرایط باید به گونه‌ای باشند که مکانهای هندسی از خطوط و دایره‌ها تشکیل شود. سادگی و سر راستی راه‌حل بستگی زیادی به انتخاب سنجیدهٔ مکانهای هندسی دارد.

شناخت مکانهای هندسی متعدد ما را قادر می‌سازد که اغلب فوراً تشخیص دهیم که نقطهٔ مطلوب باید در کجا واقع باشد.

مکانهای هندسی زیر مهمترین و پرکاربردترین مکانهای هندسی هستند.

مکان هندسی ۱ . مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه که از یک نقطهٔ مفروض به فاصلهٔ مفروضی باشد، دایره‌ای است به مرکز نقطهٔ مفروض و به شعاع فاصلهٔ مفروض.

مکان هندسی ۲. مکان هندسی نقطه‌ای که بتوان از آن مماسهایی با طول مفروض بر یک دایرهٔ مفروض رسم کرد، دایره‌ای است هم‌مرکز با دایرهٔ مفروض.

مکان هندسی ۳. مکان هندسی نقطه‌ای که به فاصلهٔ مفروضی از یک خط مفروض باشد، مرکب است از دو خط موازی با خط مفروض.

مکان هندسی ۴. مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ مفروض هم فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه است.

مکان هندسی ۵. مکان هندسی نقطه‌ای که از دو خط متقاطع هم‌فاصله باشد، نیمسازهای دو زاویه‌ای است که این دو خط ایجاد می‌کنند.

مکان هندسی ۶. مکان هندسی نقطه‌ای که مماسهایی که از آن نقطه بر دایرهٔ مفروضی رسم می‌شوند زاویهٔ مفروضی را تشکیل دهند، یا به طور خلاصه، مکان هندسی نقطه‌ای که یک دایرهٔ مفروض از آن نقطه با زاویهٔ مفروضی دیده شود، دایره‌ای هم‌مرکز با دایرهٔ مفروض است.

مکان هندسی ۷. مکان هندسی نقطه‌ای واقع در یک طرف یک پاره‌خط مفروض، که پاره‌خط از آن نقطه با زاویهٔ مفروضی دیده شود، کمانی از یک دایره است که از نقاط انتهایی آن پاره‌خط می‌گذرد.

M' N M A B T

شکل۸

فرض کنید نقطهٔ M (شکل ۸) نقطه‌ای واقع بر مکان هندسی باشد، به طوری که زاویهٔ AMB برابر با زاویهٔ مفروض باشد. دایره‌ای رسم می‌کنیم که از سه نقطهٔ A، B، M بگذرد. از هر نقطهٔ M' واقع بر کمان AMB پاره‌خط AB با همان زاویه‌ای دیده می‌شود که نقطهٔ M پاره‌خط AB را می‌بیند؛ پس هر نقطهٔ واقع بر کمان AMB، نقطه‌ای از مکان هندسی مطلوب است. از طرف دیگر، هر نقطهٔ N غیر واقع بر کمان AMB یا درون این کمان قرار دارد یا بیرون از آن. زاویهٔ ANB در حالت اول از زاویهٔ AMB بزرگتر و در حالت دوم از زاویهٔ AMB کوچکتر است. پس N متعلق به مکان هندسی نیست.

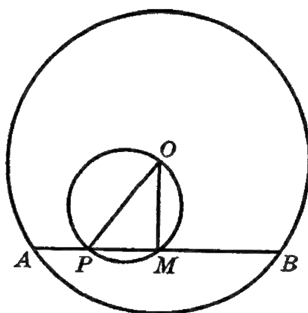
مماس AT که در نقطهٔ A بر دایره AMB رسم می‌شود با AB زاویه‌ای برابر با زاویهٔ AMB می‌سازد. پس AT را می‌توان رسم کرد. بنابر این، ترسیم دایرهٔ AMB معادل ترسیم دایره‌ای است که در نقطهٔ A بر خط AT مماس باشد و از نقطهٔ مفروض دیگر B بگذرد.

اگر این شرط را که نقطهٔ M در یک طرف مفروض پاره‌خط AB واقع باشد کنار بگذاریم، مکان هندسی مطلوب دو کمان از دو دایرهٔ همنهشت است که در دو طرف AB قرار دارند.

اگر زاویهٔ مفروض °۹۰ باشد، دو کمان دو نیمدایره باشعاعهای یکسان خواهند بود، و در نتیجه: مکان هندسی نقطه‌ای که پاره‌خط مفروضی از آن نقطه با زاویهٔ قائمه دیده شود، دایره‌ای است که پاره‌خط مفروض قطری از آن است.

مکان هندسی ۸. مکان هندسی نقاط وسط وترهایی از یک دایرهٔ مفروض که از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند، در صورتی که این نقطهٔ ثابت درون یا روی دایره باشد، یک دایره است.

فرض کنید P (شکل ۹) نقطهٔ مفروض، و M نقطهٔ وسط وتر AB از دایرهٔ مفروض (O) باشد؛ AB وتری از دایره است که از نقطهٔ مفروض P می‌گذرد. پاره‌خط OP از نقطهٔ M با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود؛ پس M روی دایره‌ای به قطر OP قرار دارد (مکان هندسی ۷). از طرف دیگر، هر نقطهٔ M واقع بر این دایره در صورتی که به P وصل شود وتری از دایرهٔ (O) را مشخص می‌سازد، که OM در نقطهٔ M بر آن عمود است. پس M نقطهٔ وسط این وتر است، و بنابراین به مکان هندسی تعلق دارد.



شکل۹

اگر نقطهٔ P خارج از (O) باشد، هر نقطهٔ M از مکان هندسی باید روی دایره‌ای به قطر OP قرار داشته باشد؛ ولی تمامی نقاط این دایره متعلق به مکان هندسی نیستند. مکان هندسی بخشی از دایرهٔ (OP) است که درون دایرهٔ مفروض (O) قرار دارد.

مکان هندسی ۹. مکان هندسی نقاط وسط همهٔ وترهایی از یک دایرهٔ مفروض که طول مفروضی داشته باشند، دایره‌ای هم‌مرکز با دایرهٔ مفروض است.

همهٔ وترها در نقطهٔ وسط خود بر این دایره مماس‌اند.

مکان هندسی ۱۰. مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌های آن از دو نقطهٔ مفروض برابر مقدار ثابت مفروضی باشد، دایره‌ای است به مرکز نقطهٔ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ مفروض.

فرض کنید M (شکل ۱۰) نقطه‌ای واقع بر مکان هندسی باشد. M را به O، نقطهٔ وسط پاره‌خط AB که توسط دو نقطهٔ مفروض A و B تعیین می‌شود، وصل می‌کنیم و MD را از M، عمود بر AB رسم می‌کنیم. با توجه به مثلثهای AOM و BOM داریم

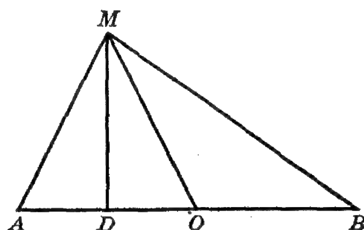
$$AM^۲ = OM^۲ + OA^۲ - ۲OA \cdot OD \ , \ BM^۲ = OM^۲ + OB^۲ + ۲OB \cdot OD$$

ولی،

$$OA = OB = \frac{۱}{۲} AB$$

پس با جمع کردن این رابطه‌ها به دست می‌آوریم

$$AM^۲ + BM^۲ = ۲OM^۲ + ۲OA^۲$$



شکل۱۰

بنابر فرض، $AM^2 + BM^2$ برابر مقدار ثابت مفروضی مانند s^2 است و $OA^2 = a^2$ که در آن a طول پاره‌خط مفروض AB است. پس

$$OM^2 = \frac{1}{2}s^2 - a^2 \qquad (1)$$

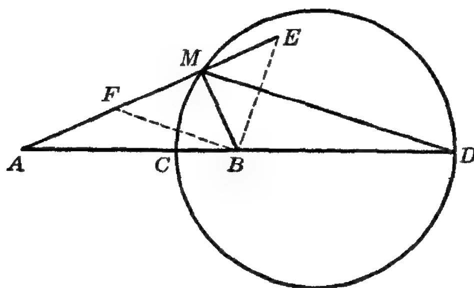
پس نقطهٔ M به فاصلهٔ ثابت OM از نقطهٔ ثابت O واقع است و بنابراین، مکان هندسی M دایره‌ای است به مرکز O.

شعاع OM را می‌توان با توجه به رابطهٔ (۱) به صورت‌زیر رسم کرد. OM یک ضلع زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که طول ضلع دیگر زاویهٔ قائمهٔ آن نصف طول پاره‌خط مفروض AB است، و وتر آن ضلع مربعی است که طول قطر آن برابر s است.

مکان هندسی ۱۱. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌هایش از دو نقطهٔ ثابت مقدار ثابتی باشد، دایره‌ای است که دایرهٔ آپولونیوس یا دایرهٔ آپولونیوسی نام دارد.

فرض کنید A و B دو نقطهٔ مفروض باشند (شکل ۱۱) و $p : q$ نسبت مفروض باشد. فرض کنید نقطه‌های C و D پاره‌خط AB را به ترتیب، به صورت داخلی و خارجی به نسبت مفروض $p : q$ تقسیم کنند و M نقطه‌ای واقع بر مکان هندسی باشد. پس داریم

$$AC : CB = AD : DB = AM : MB = p : q$$



شکل۱۱

خطهای MC و MD ضلع AB از مثلث ABM را به ترتیب، به صورت داخلی و خارجی به نسبت ضلعهای MA و MB تقسیم می‌کنند؛ پس MC و MD نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ AMB هستند و بنابراین، برهم عمودند. پس از هر نقطهٔ M واقع بر مکان هندسی مطلوب، پاره‌خط معلوم CD با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود و در نتیجه، M روی دایره‌ای به قطر CD قرار دارد (§۱۱، مکان هندسی ۷).

برای اثبات عکس این موضوع، نقطهٔ دلخواه M را روی این دایره برمی‌گزینیم و نشان می‌دهیم که این نقطه متعلق به مکان هندسی مطلوب است. از نقطهٔ B خطهای BE و BF را به موازات خطهای MC و MD رسم می‌کنیم تا AM را به ترتیب، در E و F قطع کنند. پس داریم

$$AM : ME = AC : CB \ , \ \ AM : FM = AD : BD \qquad (۱)$$

نسبتهای دوم در این تناسبها بنابر نحوهٔ ترسیم فوق، با هم برابرند. پس

$$AM : ME = AM : FM;$$

بنابراین،

$$ME = MF$$

در نتیجه، M وسط پاره‌خط EF است. زاویهٔ EBF قائمه است، زیرا دو ضلع این زاویه بادو ضلع زاویهٔ قائمهٔ CMD موازی‌اند، و در مثلث قائم‌الزاویهٔ EBF، طول پاره‌خط MB که میانهٔ وارد بر وتر است، با نصف طول وتر EF برابر است؛ پس اگر در اولین تناسب (۱) به جای پاره‌خط ME پاره‌خط MB را که با آن مساوی است قرار دهیم، به دست می‌آوریم

$$AM : MB = AC : CB = p : q$$

که نشان می‌دهد M متعلق به مکان هندسی است.

در اثبات عکس، کجا از این واقعیت که M نقطه‌ای از دایره است، استفاده کرده‌ایم؟

نکته. نقطهٔ C پاره‌خط AB را به صورت داخلی به گونه‌ای تقسیم می‌کند که $AC : CB = p : q$. ولی همچنین می‌توانیم C' را طوری برگزینیم که $BC' : C'A = p : q$ و به همین ترتیب در مورد نقطهٔ تقسیم بیرونی. بنابر این، مکان هندسی در واقع از دو دایرهٔ آپولونیوسی تشکیل می‌شود، مگر اینکه ترتیب در نظر گرفتن دو نقطهٔ مفروض در بیان مکان هندسی مشخص شده باشد.

در کاربردهای واقعی، غالباً ماهیت مسئله ترتیب در نظر گرفتن نقاط را مشخص می‌کند.

مکان هندسی ۱۲. مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربع فاصله‌هایش از دو نقطهٔ معلوم ثابت باشد، خط راستی عمود بر خط واصل بین دو نقطهٔ مفروض است.

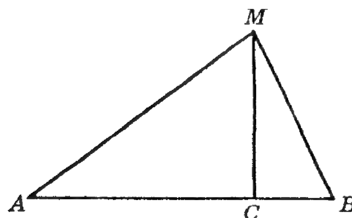
فرض کنید A و B (شکل ۱۲) دونقطهٔ مفروض باشند و M نقطه‌ای باشد به طوری که

$$AM^2 - BM^2 = d^2$$

که d مقدار مفروض است.

اگر MC را از M بر AB عمود کنیم، از مثلثهای قائم‌الزاویه خواهیم داشت

$$AM^2 - AC^2 = MC^2 = MB^2 - BC^2$$



شکل۱۲

پس

$$AM^2 - MB^2 = AC^2 - BC^2 = d^2$$

یا

$$(AC - BC)(AC + BC) = d^2$$

پس اگر $AC + BC = AB$ را با a نشان دهیم،

$$AC - BC = d^2 \div a$$

این تساوی تفاضل دو پاره‌خط AC و BC را به دست می‌دهد و در آن a مجموع دو پاره‌خط است. پس این پاره‌خطها را می‌توان رسم و نقطهٔ C را روی پاره‌خط AB مشخص کرد. پس پای عمود وارد از هر نقطهٔ M متعلق به مکان هندسی بر AB، نقطهٔ ثابتی از AB است. پس نقطهٔ M روی عمود بر AB در نقطهٔ C واقع است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که برعکس، هر نقطهٔ این خط عمود متعلق به مکان هندسی است.

نکته. اگر $BM^2 - AM^2 = d^2$ را در نظر بگیریم، مکان هندسی متفاوتی برای نقطهٔ M به‌دست می‌آوریم. در واقع مکان هندسی از دو خط تشکیل می‌شود، مگر این که‌ترتیب در نظرگرفتن دو نقطهٔ مفروض در بیان مکان هندسی مشخص شود.

تمرین

۱) خطی موازی با قاعدهٔ BC از مثلث ABC دوضلع AB و AC را به ترتیب، در D و E قطع می‌کند. نشان دهید که اگر این خط موازی تغییر کند، مکان هندسی $M = (BE, CD)$ یک خط راست است.

۲) روی دو ضلع AB و AC از مثلث ABC دو پاره‌خط مساوی AB' و AC' را جدا می‌کنیم. دو خط عمود بر AB و AC در نقاط B' و C' یکدیگر را در D قطع می‌کنند. نشان دهید که اگر طول مشترک AB' و AC' تغییر کند، مکان هندسی نقطهٔ D یک خط راست است. مکان هندسی تصویر D نسبت به پاره‌خط $B'C'$ را به دست آورید.

۳) مکان هندسی نقطه‌ای را به دست آورید که دو پاره‌خط متوالی AB و BC واقع بر روی یک خط راست از آن نقطه با زاویه‌های برابر دیده شوند.

۴) قاعدهٔ BC از مثلث متغیر ABC ثابت است و مجموع $AB + AC$ نیز مقداری ثابت است. خطی که از نقطهٔ D، وسط قاعدهٔ BC، به موازات AB رسم می‌شود، خطی را که از نقطهٔ C به موازات نیمساز داخلی زاویهٔ A رسم می‌شود، در نقطهٔ P قطع می‌کند. نشان دهید که مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ای به مرکز D است.

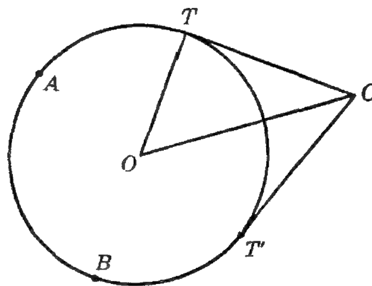
در زیر مثالهایی ازکاربرد مکانهای هندسی در حل مسائل نشان داده شده است.

۱۲. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و از نقطهٔ مفروض سومی با زاویهٔ مفروضی دیده شود.

تحلیل. فرض کنید (O) دایرهٔ مطلوب باشد که از دو نقطهٔ مفروض A و B می‌گذرد (شکل ۱۳). اندازهٔ زاویهٔ بین مماسهای CT و CT' که از نقطهٔ مفروض C بر (O) رسم می‌شوند مفروض است؛ بنابر این، از مثلث قائم‌الزاویهٔ OTC زاویهٔ حادهٔ OCT را داریم؛ به عبارت دیگر، شکل این مثلث معلوم است. پس نسبت $OT : OC$ و همچنین نسبتهای

$$OA : OC = OB : OC$$

نیز معلوم‌اند. درنتیجه، دو مکان هندسی برای نقطهٔ O داریم (دو دایرهٔ آپولونیوسی) و این نقطه‌رامی‌توانیم‌بیابیم.



شکل۱۳

ترسیم. نقطهٔ دلخواه Q را روی نیمساز داخلی زاویهٔ مفروض P در نظر می‌گیریم و از آن نقطه عمود QR را بر یکی از دو ضلع زاویه رسم می‌کنیم. هر دو پاره‌خط مفروض AC و BC را به نسبت $QR : QP$ به صورت داخلی و خارجی تقسیم می‌کنیم، تا به ترتیب نقاط E، F و G، H به دست آید. هر نقطهٔ مشترک O بین دو دایره‌ای که EF و GH قطرهای آنها هستند مرکز دایرهٔ مطلوب است.

اثبات و بحث به خواننده واگذار می‌شود.

۱۳. مسئله. از دو نقطهٔ مفروض بر روی یک دایره دو وتر موازی رسم کنید به‌طوری که مجموع طولهایشان مقدار مفروضی باشد.

تحلیل. فرض کنید A و B دو نقطهٔ مفروض بر روی دایره‌ای به مرکز O، و AC و BD وترهای مطلوب باشند. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABDC$ (شکل ۱۴) $CD = AB$ و طول AB معلوم است؛ پس CD در F، یعنی نقطهٔ وسط آن، بر دایرهٔ معلومی به مرکز O مماس است(§۱۱، مکان هندسی ۹).

اگر E وسط AB باشد، داریم

$$۲EF = AC + BD$$

پس نقطهٔ E و طول $AC + BD$ معلوم است؛ پس یک مکان هندسی دیگر برای F داریم.

ترسیم. دایرهٔ (O, OE) را رسم کنید. اگر طول مفروض $۲s$ باشد، دایرهٔ (E, s) را رسم کنید تا (O, OE) را در نقطهٔ F قطع کند. خط مماس بر (O, OE) در نقطهٔ F، دایرهٔ مفروض (O) را در C و D قطع می‌کند. خطهای AC و BD وترهای مطلوب هستند.

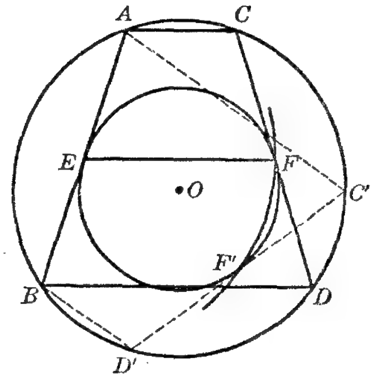
اثبات. دو وتر AB و CD برابرند، زیرا از O، یعنی مرکز دایرهٔ مفروض (O) به یک فاصله‌اند. پس $ABDC$ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است و در نتیجه

$$AC + BD = ۲EF$$

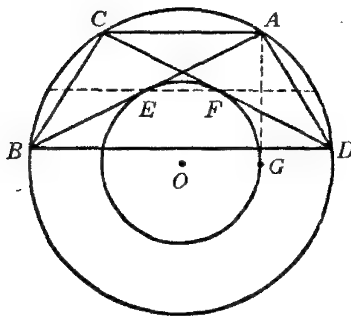
چون در هنگام ترسیم EF را برابر s گرفتیم، $AC + BD$ دارای طول مطلوب است.

بحث. دایرهٔ (E, s) در صورتی که s از $۲OE$ بزرگتر باشد، دایرهٔ (O, OE) را قطع نمی‌کند. اگر $s < ۲OE$، دو نقطهٔ تلاقی F و F' را خواهیم داشت و مسئله دو جواب دارد.

خط مماس بر دایرهٔ (O, OE) در نقطهٔ F دو نقطهٔ C و D را روی دایرهٔ (O) تعیین می‌کند. این دو نقطه و نقاط مفروض A و B چهار خط را مشخص می‌کنند که دو ضلع و دو قطر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین هستند. شکل نشان می‌دهد که از این چهار خط کدام دو خط، خطوط مطلوب هستند.



شکل۱۴



شکل۱۵

فرض کنید G (شکل ۱۵) نقطهٔ تماس مماس دومی باشد که از A بر دایرهٔ (O, OE) رسم می‌شود. اگر $s < EG$، مماس بر (O, OE) در F وتر AB را قطع می‌کند، و خط AB یک قطر از ذوزنقهٔ حاصل خواهد بود. خط EF با نصف تفاضل دو قاعده برابر است.

حالتی را در نظر بگیرید که تفاضل دو وتر مقدار مفروضی باشد.

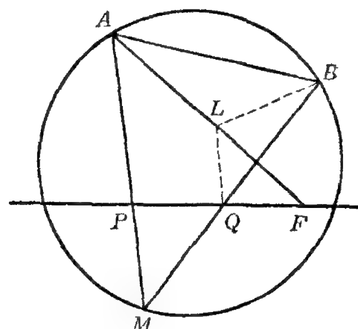
۱۴. مسئله. بر روی یک دایرهٔ مفروض نقطه‌ای بیابید به‌طوری که خطوطی که این نقطه را به دو نقطهٔ مفروض واقع بر همین دایره وصل می‌کنند، خط مفروضی را در دو نقطه که‌نسبت فاصله‌هایشان از نقطهٔ مفروض دیگری واقع بر همین خط مقدار مفروضی باشد قطع کنند.

فرض کنید خطهای AM و BM که نقاط مفروض A و B واقع بر دایره را به نقطهٔ مطلوب M وصل می‌کنند خط مفروض FPQ را در دو نقطهٔ P و Q قطع کنند (شکل ۱۶). اگر F نقطهٔ ثابت مفروض باشد و خط QL که از نقطهٔ Q موازی با MA رسم می‌شود، خط FA را در L قطع کند خواهیم داشت $\angle LQB = \angle AMB$ و چون وتر AB مفروض است، زاویهٔ AMB معلوم است.

از طرف دیگر، داریم

$$FL : FA = FQ : FP$$

و نسبت دوم مفروض است؛ پس نقطهٔ L معلوم است. پس پاره‌خط معلوم LB از نقطهٔ Q با زاویهٔ مفروض دیده می‌شود؛ به این ترتیب، یک مکان هندسی برای Q به دست می‌آید (§۱۱، مکان هندسی ۷). نقطهٔ Q در



محل برخورد این مکان هندسی و خط مفروض FPQ قرار دارد. خط BQ دایره را در نقطهٔ مطلوب M قطع می‌کند.

اثبات و بحث به عهده خواننده واگذار می‌شود.

تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

۱) a،b،A ۲) a،c،h_b ۳) a،h_a،m_a
۴) a،h_a،$b:c$ ۵) a،m_a،$b:c$ ۶) a،t_a،$b:c$

متوازی‌الاضلاعی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

۷) یک ارتفاع و دو قطر.
۸) دو ارتفاع و یک زاویه.
۹) دو ارتفاع و یک قطر.
۱۰) یک ضلع، یک زاویه، و یک قطر.
۱۱) یک ضلع، ارتفاع متناظر با آن ضلع، و زاویهٔ بین قطرها.

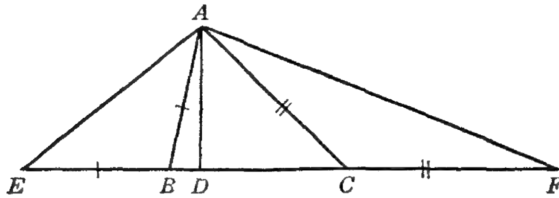
چهارضلعی $ABCD$ را که اجزای زیر از آن معلوم‌اند رسم کنید:

۱۲) قطر AC و زاویه‌های ABC، ADC، BAC و DAC.
۱۳) اضلاع AB و BC، قطر CA و زاویه‌های ADB و BDC.
۱۴) اضلاع AB و AD، زاویهٔ DAB و شعاع دایرهٔ محاطی.
۱۵) یک چهارضلعی رسم کنید که سه ضلع و شعاع دایرهٔ محیطی آن مفروض است. در مورد جواب بحث کنید.
۱۶) سه نقطه مفروض‌اند. نقطهٔ چهارمی را در صفحهٔ آن سه نقطه بیابید به‌طوری که فاصله‌هایش از آن سه نقطهٔ مفروض نسبتهای مفروضی را داشته باشند.
۱۷) دایره‌ای با شعاع مفروض رسم کنید که بر دایرهٔ مفروضی مماس و مرکز آن بر خط مفروضی واقع باشد.
۱۸) دایره‌ای با شعاع مفروض رسم کنید که از نقطهٔ مفروضی بگذرد و مماسهایی که از یک نقطهٔ مفروض دیگر بر آن رسم می‌شوند، دارای طول مفروضی باشند.
۱۹) در یک دایرهٔ مفروض مثلث قائم‌الزاویه‌ای محاط کنید، به طوری که هر ضلع زاویهٔ قائمهٔ مثلث از نقطهٔ مفروضی بگذرد.
۲۰) مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویهٔ روبرو به قاعده، و نقطهٔ تقاطع نیمساز آن زاویه با قاعده مفروض است.
۲۱) مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده و زاویه‌هایی که میانهٔ وارد بر قاعده با دو ضلع دیگر می‌سازد مفروض است.
۲۲) دایره‌ای مفروض است. مثلثی بر این دایره محیط کنید که از آن، یک ضلع و یکی از زاویه‌های مجاور آن ضلع مفروض باشد و رأس این زاویه بر روی خط مفروضی قرار داشته باشد.
۲۳) مثلثی را با مفروض بودن قاعده، یک زاویهٔ مجاور قاعده، و زاویه‌ای که میانهٔ رسم شده از رأس این زاویه با ضلع روبروی این زاویه می‌سازد، رسم کنید.

د. اجزای غیرمستقیم

در میان شرایطی که لازم است شکلی که می‌خواهیم ترسیم کنیم دارا باشد، ممکن است اجزایی مفروض باشند که مستقیماً در شکل مورد بحث قرار نداشته باشند. مثلاً، ممکن است لازم باشد که مجموع دو ضلع یک مثلث طول مفروضی داشته باشد،یا تفاضل دو زاویهٔ قاعده مقدار مفروضی باشد، و غیره. برای یافتن راه حل این‌گونه مسائل، باید این «اجزای غیرمستقیم» را در تحلیل مسئله وارد کنیم.

۱۵. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، محیط، زاویهٔ روبرو به قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده $(2p, A, h_a)$ مفروض است.



شکل۱۷

فرض کنید ABC (شکل ۱۷) مثلث مطلوب باشد. BC را از دو طرف امتداد دهید و BE را برابر BA، و CF را برابر CA روی آن جدا کنید. پس $EF = 2p$.

مثلثهای EAB و FCA متساوی‌الساقین‌اند، پس

پس
$$\angle E = \angle EAB = \frac{1}{2}\angle ABC, \quad \angle F = \angle FAC = \frac{1}{2}\angle ACB$$
$$\angle EAF = \frac{1}{2}B + A + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}(A+B+C) + \frac{1}{2}A = 90^\circ + \frac{1}{2}A$$

و بنابراین، زاویهٔ EAF معلوم است. ارتفاع AD از مثلث ABC ارتفاع مثلث AEF هم هست. پس از مثلث AEF، قاعده، $EF = 2p$، زاویهٔ روبروی آن، $\angle EAF = 90^\circ + \frac{1}{2}A$ و ارتفاع، $AD = h_a$ معلوم است؛ بنابراین می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. رأس A از این مثلث رأس مثلث مطلوب ABC نیز هست. چون $BA = BE$ و $CA = CF$، رأسهای B و C نقاط برخورد عمودمنصفهای AE و AF با EF هستند.

مسئله ممکن است دو جوابِ متقارن نسبت به عمودمنصف EF، یا یک جواب داشته باشد، یا اصلاً جوابی نداشته باشد.

نکته. برای ترسیم مثلث مطلوب ABC، به عنوان یک گام میانی مثلث دیگری، یعنی مثلث AEF، را رسم کردیم. استفاده از یک مثلث کمکی غالباً می‌تواند بسیار مفید باشد.

۱۶. ملاحظه. زاویه‌های مثلث AEF به سادگی بر حسب زاویه‌های ABC بیان شدند و یکی از ارتفاعهای AEF ارتفاع ABC نیز هست. این روابط راه ساده‌ای را برای حل مسائل زیر در اختیارمان می‌گذارد.

نکته. بقیهٔ مسائل مربوط به محیط مثلث را بعداً بررسی خواهیم کرد (بندهای ۱۵۷ تا ۱۷۳).

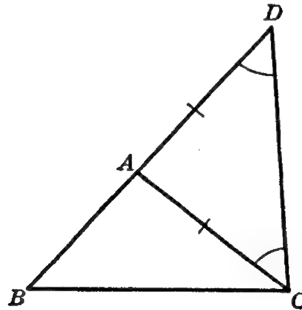
تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

۱) $2p$، A، B ۲) $2p$، h_a، B (یا C)

۱۷. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویهٔ روبرو به قاعده و مجموع دو ضلع دیگر (a، A، $b+c$) مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۱۸) مثلث مطلوب باشد. BA را امتداد دهید و روی آن AD را برابر AC جدا کنید. در مثلث متساوی‌الساقین ACD داریم $\angle D = \angle ACD = \frac{۱}{۲}\angle BAC$. پس از مثلث BCD قاعده، $BC = a$، یک ضلع، $BD = b+c$ و زاویهٔ $D = \frac{۱}{۲}A$ معلوم است؛ بنابراین می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. رأسهای B و C رأسهای مثلث مطلوب نیز هستند، و رأس سوم A، محل برخورد BD و عمودمنصف پاره‌خط CD است.



شکل۱۸

بحث. حل این مسئله ممکن نیست مگر اینکه داشته باشیم $a < (b+c)$. بافرض برقرار بودن این شرط، در مثلث کمکی BCD زاویهٔ روبرو به ضلع کوچکتر را داریم، بنابراین ممکن است بتوانیم دو یایک مثلث با شرایط مفروض برای BCD رسم کنیم، یا ممکن است چنین مثلثی قابل ترسیم نباشد. از هر مثلث کمکی یک و تنها یک مثلث مطلوب به دست می‌آید؛ پس ممکن است مسئله دو جواب داشته باشد یا یک جواب داشته باشد یا جواب نداشته باشد.

نکته. در مثلث کمکی BCD داریم

$$\angle D = \frac{۱}{۲}\angle A, \quad B = B$$

و

$$\begin{aligned}\angle BCD &= \angle BCA + \angle ACD = C + \frac{۱}{۲}A \\ &= \frac{۱}{۲}C + \frac{۱}{۲}C + \frac{۱}{۲}A + \frac{۱}{۲}B - \frac{۱}{۲}B \\ &= \frac{۱}{۲}(A+B+C) - \frac{۱}{۲}(B-C) = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}(B-C)\end{aligned}$$

در مثلث BCD ارتفاع BD، ارتفاع h_c از مثلث ABC نیز هست.

گاهی به جای امتداد دادن ضلع AB بهتر است ضلع AC را امتداد دهیم.

این روابط راه‌حل ساده‌ای برای مسائل زیر در اختیارمان قرار می‌دهند.

مسائل دیگری را که به مجموع دو ضلع یک مثلث مربوط می‌شوند بعداً (بندهای ۱۵۷ تا ۱۷۳) بررسی خواهیم کرد.

تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

۱) $b+c$، a، B (یا C) ۲) $b+c$، B، h_c ۳) $b+c$، C، a

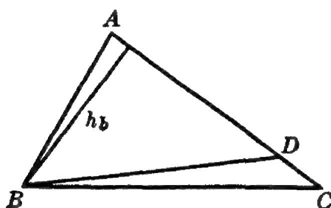
۴) $b+c$، A، B ۵) $b+c$، a، h_b (یا h_c) ۶) $b+c$، a، $B-C$

۷) $b+c$، h_c، $B-C$ ۸) $b+c$، h_b، $B-C$

۹) b، c، $B-C$. راهنمایی: $b+c$ را رسم کنید. در مثلث BCD رأسهای B و D معلوم‌اند و یک مکان هندسی برای C داریم. BA را برابر c رسم کنید. نقطهٔ C روی دایرهٔ (A,b) نیز واقع است.

۱۸. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویهٔ روبروی قاعده، و تفاضل دو ضلع دیگر $(a، A، b-c)$ مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۱۹) مثلث مطلوب باشد. روی AC، AD را برابر AB جدا کنید، به‌طوری که $CD=b-c$.



شکل۱۹

در مثلث متساوی‌الساقین ADB داریم

$$\angle ADB=\angle ABD=\frac{1}{2}(180^\circ-A)=90^\circ-\frac{1}{2}A$$

پس $\angle BDC=90^\circ+\frac{1}{2}A$. یعنی در مثلث BCD قاعدهٔ $BC=a$، زاویهٔ مقابل آن، $\angle BDC=90^\circ+\frac{1}{2}A$ و ضلع $CD=b-c$ را می‌دانیم، پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. دو رأس B و C از این مثلث رأسهای مثلث مطلوب ABC نیز هستند؛ رأس سوم این مثلث، یعنی A، روی امتداد ضلع CD و عمودمنصف BD قرار دارد.

اگر شرط $a>b-c$ برقرار نباشد، رسم مثلث ناممکن است. اگر این شرط برقرار باشد، زاویهٔ مفروض مثلث BCD روبروی ضلع بزرگتر قرار دارد، و رسم چنین مثلثی به یک‌و تنها یک طریق ممکن است. پس مسئلهٔ مورد نظر یک جواب دارد.

نکته. زاویهٔ BCD از مثلث کمکی BCD برابر است با زاویهٔ C از مثلث ABC، $\angle BDC=90^\circ+\frac{1}{2}A$ و

$$\begin{aligned}\angle CBD&=\angle ABC-\angle ABD=B-(90^\circ-\tfrac{1}{2}A)\\&=B+\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}C-90^\circ\\&=\tfrac{1}{2}(A+B+C)+\tfrac{1}{2}(B-C)-90^\circ=\tfrac{1}{2}(B-C)\end{aligned}$$

همچنین ارتفاع وارد بر CD همان ارتفاع h_b از مثلث ABC است. با استفاده از این رابطه‌ها می‌توان مسائل زیر را حل کرد.

تمرین

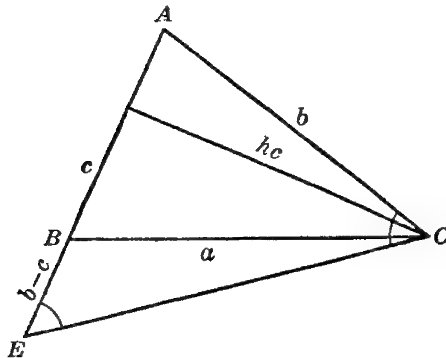
مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

۱) C،a،$b-c$　　۲) $B-C$،a،$b-c$　　۳) C،h_b،$b-c$

۴) $B-C$،h_b،$b-c$　　۵) B،A،$b-c$　　۶) A،h_b،$b-c$

۱۹. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، تفاضل دو ضلع دیگر، و ارتفاع وارد بر یکی از این دو ضلع $(h_c$ ،$b-c$،$a)$مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۲۰) مثلث مطلوب باشد. AB را امتداد دهید و روی‌آن AE را برابر با AC جدا کنید، به‌طوری که $BE=b-c$. در مثلث BCE داریم $BC=a$، $BE=b-c$ و ارتفاع وارد بر BE برابر h_c است؛ پس این مثلث را می‌توان رسم کرد و از این مثلث به آسانی می‌توان به مثلث مطلوب ABC رسید.



شکل ۲۰

نکته. زاویه‌های مثلث BCE به همان روشی که برای تعیین زاویه‌های مثلث BCD در مسئلهٔ قبل (§۱۸) به کار گرفته شد تعیین می‌شوند و به کمک این رابطه‌ها می‌توان مسائل زیر را حل کرد.

مسائل دیگری مربوط به تفاضل دو ضلع یک مثلث را بعداً بررسی خواهیم کرد (بندهای ۱۵۷ تا ۱۷۳).

تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

۱) $B-C$،h_c،$b-c$　　۲) A،h_c،$b-c$

۳) $B-C$،c،b راهنمایی: BCD یا BCE را به عنوان مثلث کمکی به کار برید.

۲۰. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویهٔ روبرو به قاعده و مجموع ارتفاعهای وارد بر دو ضلع دیگر $(h_b+h_c$،A،$a)$ مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۲۱) مثلث مطلوب باشد. ارتفاع BE را امتداد دهید و EG را برابر با ارتفاع CF روی آن جدا کنید. از نقطهٔ G خط GH را موازی AC رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در H قطع کند. پس،

$$\angle BHG=\angle BAC=A\ ,\ \angle BGH=\angle BEA=۹۰^\circ$$

پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BGH، یک ضلع زاویهٔ قائمه، $BG=h_b+h_c$، و زاویهٔ‌حادهٔ $\angle BHG=A$ را می‌دانیم؛ پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم و طول BH را تعیین کنیم.

به آسانی می‌توان نشان داد که $BH=b+c$. خط AI را موازی BG رسم می‌کنیم تا HG را در I قطع

کند. $AIGE$ مستطیل است و بنابراین، $AI = EG = h_c$. حال در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ACF و AHI داریم

$$AI = CF = h_c\,,\ \angle AHI = \angle CAF = A$$

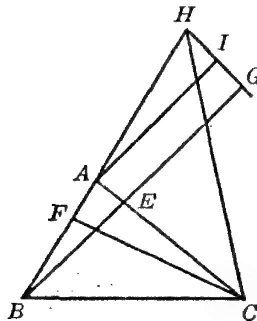
پس دو مثلث همنهشت‌اند، و $AH = AC = b$؛ بنابراین،

$$BH = BA + AH = b + c$$

اکنون از مثلث مطلوب ABC، a، A و $b+c$ را می‌دانیم و به مسئله‌ای می‌رسیم که حل آن را می‌دانیم (§۱۷).

ولی می‌توان به طور مستقیم از مثلث کمکی BGH در شکل ۲۱ به مثلث مطلوب ABC رسید. رأس B از مثلث BGH رأس مثلث ABC هم هست. برای یافتن C ملاحظه می‌کنیم که در مثلث متساوی‌الساقین AHC داریم

$$\angle AHC = \angle ACH = \frac{۱}{۲}A$$



شکل۲۱

و چون $\angle AHG = A$، خط HC نیمساز زاویهٔ H است و این خط مکان هندسی نقطهٔ C را تشکیل می‌دهد. دایرهٔ (B, a) مکان هندسی دیگری برای C است. پس رأس A بر روی ضلع BH از مثلث BGH و همچنین روی عمودمنصف CH قرار دارد.

اگر زاویهٔ مفروض A منفرجه باشد، مثلث BGH به‌جای A، شامل مکمل A خواهد بود، و مسئله به همان ترتیب حل می‌شود.

۲۱. تعریف. مثلث قائم‌الزاویهٔ BGH شامل اجزای زیر است:

$$b + c, h_b + h_c, A$$

بنابراین، با داشتن هر دو جزء از این اجزا، جزءِ سوم را می‌توان تعیین کرد. مجموعه‌ای از اجزای مثلث را که دارای این ویژگی باشد معلومات مثلث می‌نامند.

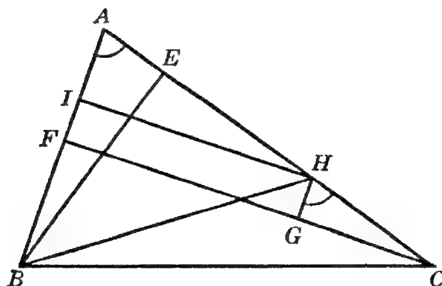
تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن مفروض باشد:

۱) $C، B، h_b + h_c$
۲) $c، b، h_b + h_c$
۳) $A، b، h_b + h_c$
۴) $a، b + c، h_b + h_c$
۵) $B - C، b + c، h_b + h_c$. راهنمایی: مثلث BGH زاویهٔ A را به دست می‌دهد، و بنابراین، $B + C = ۱۸۰^\circ - A$ نیز معلوم است؛ پس می‌توان زاویه‌های B و C را رسم کرد.
۶) $A، b - c، h_b + h_c$.

۲۲. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویهٔ روبرو به قاعده و تفاضل ارتفاعهای وارد بر دو ضلع دیگر $(h_c - h_b، A، a)$ مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۲۲) مثلث مطلوب باشد. ارتفاعهای BE و CF را رسم کنید و FG را برابر BE روی CF جدا کنید، به‌طوری که $CG = h_c - h_b$. GH را موازی با AB رسم کنید. در مثلث قائم‌الزاویهٔ CGH، قاعدهٔ $CG = h_c - h_b$ و $\angle CHG = A$ را می‌دانیم و بنابراین، می‌توانیم آن‌را رسم و طول CH را تعیین کنیم.



شکل۲۲

اکنون نشان می‌دهیم که $CH = b - c$؛ HI را از H بر AB عمود می‌کنیم. داریم $HI = FG = BE$، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE و AHI همنهشت‌اند، زیرا زاویهٔ A در آنها مشترک است و $BE = HI$؛ بنابراین، $AH = AB$ و

$$CH = CA - AH = CA - AB = b - c$$

چون $b - c$ را می‌دانیم، این مسئله به مسئله‌ای که قبلاً حل کرده‌ایم (§۱۸) تبدیل می‌شود.

ولی مثلث مطلوب را می‌توان مستقیماً از مثلث CHG در شکل ۲۲ به دست آورد. رأس C از مثلث CHG رأس مثلث مطلوب نیز هست. از مثلث متساوی‌الساقین ABH داریم $\angle AHB = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - A)$؛ اما

$$\angle AHG = ۱۸۰^\circ - \angle GHC = ۱۸۰^\circ - A$$

پس BH نیمساز زاویهٔ AHG است و یک مکان هندسی برای رأس B از مثلث ABC به دست می‌آید؛ مکان هندسی دیگر دایرهٔ (C, a) است. اکنون رأس A را می‌توان از محل برخورد عمودمنصف BH و امتداد CH به دست آورد.

اگر زاویهٔ مفروض A منفرجه باشد، مثلث CGH به جای زاویهٔ A، شامل مکمل A خواهد بود و مسئله را می‌توان به همان روش حل کرد.

نکته. بحث بالا نشان می‌دهد که اجزای $(b - c، h_c - h_b، A)$ یک دسته از معلومات مثلث را تشکیل می‌دهند.

تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

۱) $C، B، h_c - h_b$

۲) $c، b، h_c - h_b$

۳) $B - C، b - c، h_c - h_b$

۴) $b + c، A، h_c - h_b$

تمرینهای تکمیلی

۱) از نقطه‌ای مفروض دایره‌ای مماس بر دو خط موازی رسم کنید.
۲) از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید که از نقطهٔ دور از دسترس محل برخورد دو خط مفروض بگذرد.
۳) خطی با راستای مفروض رسم کنید که دو ضلع AB و AC از مثلث مفروض ABC را در نقطه‌های B' و C' قطع کند، به‌طوری که $BB' = CC'$.
۴) از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید به‌طوری که مجموع (یا تفاضل) فاصله‌هایش از دو نقطهٔ مفروض برابر با طول مفروضی باشد. در مورد این دوحالت بحث کنید: وقتی قرار باشد دو نقطهٔ مفروض در یک طرف خط مطلوب واقع باشند، و وقتی قرار باشد دو نقطهٔ مفروض در دو طرف خط مطلوب واقع باشند.
۵) در یک مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری را که یکی از رأسهای آن مفروض است محاط کنید.
۶) در یک مربع مفروض، مربع دیگری را که یکی از رأسهای آن مفروض است، محاط کنید.
۷) روی ضلع CD از متوازی‌الاضلاع مفروض $ABCD$ نقطهٔ P را چنان تعیین کنید که زاویه‌های BPA و BPC برابر باشند.
۸) متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که دو نقطهٔ مفروض دو رأس مقابل در آن باشند و دو رأس دیگر آن روی دایرهٔ مفروضی واقع باشند.
۹) از یک نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ مفروض خطی چنان رسم کنید که دو وتری که دو دایره روی آن جدا می‌کنند (i) برابر باشند؛ (ii) دارای نسبت مفروضی باشند.
۱۰) از یک نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔمفروض خطی چنان رسم کنید که مجموع دو وتری که دو دایره روی آن جدا می‌کنند برابر طول مفروضی باشد.
۱۱) از یک نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ مفروض خطی چنان رسم کنید که زاویه‌های مرکزی متناظر با دو وتری که دایره‌ها روی این خط جدا می‌کنند، برابر باشند.
۱۲) یک زاویه و نقطه‌ای واقع بر روی یک ضلع آن مفروض است. نقطهٔ دومی روی این ضلع بیابید به‌طوری که از نقطهٔ اول و ضلع دوم زاویه به یک فاصله باشد.
۱۳) یک زاویه مفروض است، دایره‌ای به شعاع مفروض رسم کنید که مرکزش روی یک ضلع این زاویه باشد و ضلع دیگر زاویه وتری با طول مفروض در آن جدا کند.
۱۴) دایره‌ای به مرکز نقطه‌ای مفروض رسم کنید که مجموع وترهایی که روی دو خط موازی مفروض جدا می‌کند برابر با طول مفروضی باشد.
۱۵) خطی به موازات قاعدهٔ BC از مثلث مفروض ABC رسم کنید تا دو ضلع AB و AC را در نقطه‌های B' و C' قطع کند، به طوری که ذوزنقهٔ $BB'C'C$ محیط مفروضی داشته باشد.
۱۶) مثلثی رسم کنید به‌طوری که اضلاعش از سه نقطهٔ مفروض ناهمخط بگذرند و توسط این نقطه‌ها به‌طور داخلی به نسبتهای مفروض تقسیم شوند.

تمرین برای مرور

ترسیم

۱) در یک دایرهٔ مفروض قطری رسم کنید به‌طوری که از نقطه‌ای مفروض با زاویهٔ مفروضی دیده شود.
۲) خطی رسم کنید که دو دایرهٔ مفروض روی آن وترهایی با طولهای مفروض جدا کنند.
۳) دو دایرهٔ مفروض را طوری نسبت به هم قرار دهید که مماسهای مشترک داخلی (یا خارجی) آنها زاویه‌ای

با اندازهٔ مفروض تشکیل دهند.

۴) مثلث قائم‌الزاویه را با مفروض بودن ارتفاع وارد بر وتر، و یک نقطه روی هر یک از دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن رسم کنید.

۵) یک مثلث قائم‌الزاویه و نقطه‌ای واقع بر امتداد ارتفاع وارد بر وتر آن مفروض‌اند. خطی رسم کنید که از این نقطه بگذرد و نقطهٔ وسط پاره‌خطی که توسط دو ضلع زاویهٔ قائمه روی آن جدا می‌شود روی وتر باشد.

۶) دو نقطه، که با مرکز دایرهٔ مفروضی همخط هستند، مفروض‌اند. از این دو نقطه دو خط رسم کنید که یکدیگر را روی دایره قطع کنند و وترهایی که دایره روی آنها جدا می‌کند برابر باشند.

۷) از یک نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید، به طوری که پاره‌خط جدا شده روی این خط توسط دو خط موازی مفروض از نقطهٔ مفروض دیگری با زاویهٔ مفروضی دیده شود.

۸) از یک مثلث قاعده، یک زاویهٔ مجاور به قاعده و نقطهٔ تقاطع قاعده و قطری از دایرهٔ محیطی مثلث که از رأس مقابل به قاعده می‌گذرد، مفروض است. این مثلث را رسم کنید.

۹) مثلثی را که دایرهٔ محاطی آن رسم شده است، و نقطهٔ وسط قاعده و یک نقطه از نیمساز خارجی یکی از زاویه‌های قاعدهٔ آن مفروض‌اند رسم کنید.

۱۰) مثلث ABC را که از آن، محل خطی که قاعدهٔ BC روی آن قرار دارد و محل نقطه‌ای واقع بر دایرهٔ‌محیطی مثلث و محل نقطه‌ای واقع بر ضلع AB و همچنین، شعاع دایرهٔ محیطی و طول قاعدهٔ BC مفروض است رسم کنید.

۱۱) در یک مثلث مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاعی با مساحت مفروض محاط کنید.

۱۲) دایره‌ای با شعاع مفروض رسم کنید که از یک نقطهٔ مفروض بگذرد و روی خط مفروضی وتری با طول مفروض جدا کند.

۱۳) دایره‌ای رسم کنید که بر دو دایرهٔ هم‌مرکز مماس باشد و از نقطهٔ مفروضی بگذرد.

۱۴) مثلث قائم‌الزاویه‌ای را با مفروض بودن ارتفاع وارد بر وتر، و فاصلهٔ رأس زاویهٔ قائمه از محل برخورد نیمساز داخلی یک زاویهٔ حاده با ضلع مقابلش رسم کنید.

۱۵) مستطیلی رسم کنید که یک رأس آن بر یکی از رأسهای مثلث مفروضی منطبق باشد و سه رأس دیگر آن بر روی سه دایره به قطرهای اضلاع این مثلث واقع باشند.

۱۶) مثلثی را با مفروض بودن یک میانه و شعاعهای دایره‌های محیطی دو مثلثی که از تقسیم مثلث توسط این میانه به دست می‌آیند رسم کنید.

۱۷) مثلث ABC را با مفروض بودن $a-b$، h_b+h_c و A رسم کنید.

۱۸) روی خط مفروض AB نقطهٔ P را طوری تعیین کنید که اگر PT و PT' مماسهای رسم شده از نقطهٔ P بر یک دایره مفروض باشند، داشته باشیم $\angle APT = \angle BPT'$.

۱۹) روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC دو نقطهٔ P و Q را طوری تعیین کنید که خط PQ راستای مفروضی داشته باشد و $PQ : (BP+CQ) = k$ که k عدد (نسبت) مفروضی است.

۲۰) خطی عمود بر قاعدهٔ مثلث مفروضی رسم کنید، به‌طوری که مساحت مثلث به نسبت مفروض $p : q$ تقسیم شود.

۲۱) از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید که مساحت مثلث مفروضی را نصف کند.

۲۲) خطی رسم کنید که راستای مفروضی داشته باشد و طول دو پاره‌خطی که توسط یک دایرهٔ مفروض و دو ضلع یک زاویهٔ مفروض روی آن جدا می‌شوند نسبت مفروضی داشته باشند.

۲۳) خطی رسم کنید که از یک رأس مثلثی بگذرد و حاصل‌ضرب فاصله‌هایش از دو رأس دیگر مثلث برابر

مقدار مفروض $k^۲$ باشد.

۲۴) از دو نقطهٔ مفروض A و B دو خط AP و BQ را رسم کنید که خط مفروض PQ را در نقاط P و Q قطع کنند، به‌طوری که $AP = BQ$ و AP و BQ زاویه‌ای با اندازهٔ مفروض تشکیل دهند.

۲۵) از نقطهٔ مفروض R خطی رسم کنید که خط مفروضی را در D و یک دایرهٔ مفروض را در E و F قطع کند، به‌طوری که $RD = EF$.

۲۶) دایره‌ای به مرکز نقطه‌ای مفروض رسم کنید، به‌طوری که دو نقطهٔ حاصل از تقاطع آن با دو دایرهٔ هم‌مرکز، بامرکز این دایره‌ها همخط باشند.

۲۷) مربعی در یک چهار ضلعی مفروض محاط کنید.

تناسبها

۲۸) دایره‌ای که از رأسهای A و B و C از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌گذرد ضلع DA را در A' و ضلع DC را در C' قطع می‌کند. ثابت کنید که $A'D : A'C' = A'C : A'B$.

۲۹) ثابت کنید که از سه پاره‌خط واصل بین رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک نقطهٔ واقع بر دایرهٔ محیطی آن مثلث، یکی با مجموع دوتای دیگر برابر است.

۳۰) سه خط موازی از سه رأس A، B و C از مثلث ABC رسم شده است. این خطها اضلاع مقابل رأسهای A، B و C را به ترتیب، در نقطه‌های X، Y، و Z قطع می‌کنند. نشان دهید که مساحت مثلث XYZ دو برابر مساحت مثلث ABC است.

۳۱) نشان دهید که اگر فاصلهٔ بین دو نقطه بامجموع (یاتفاضل) طول مماسهایی که از این نقاط بر یک دایره رسم می‌شود برابر باشد، خطی که از آن دو نقطه می‌گذرد نیز بر دایره مماس است .

۳۲) دو خط موازی AE و BD که از دو رأس A و B از مثلث ABC رسم شده‌اند خطی را که از رأس C می‌گذرد در نقطه‌های E و D قطع می‌کنند. اگر خطی که از E به موازات BC رسم می‌شود، AB را در F قطع کند، نشان دهید که DF با AC موازی است.

۳۳) وتر متغیر AB از یک دایرهٔ مفروض با قطر ثابتی از آن دایره که از نقطهٔ مفروض P می‌گذرد موازی است. نشان دهید که مجموع مربع فاصله‌های P از دو انتهای AB ثابت و برابر است با دو برابر مربع فاصلهٔ P از وسط کمان AB.

۳۴) نقطه‌های A'، B'، و C' اضلاع BC، CA و AB از مثلث ABC را به‌طور داخلی به نسبت یکسان k تقسیم می‌کنند. نشان دهید که سه مثلث $AB'C'$، $BC'A'$، و $CA'B'$ هم‌ارزند. نسبت مساحتهای ABC و $A'B'C'$ را بیابید.

۳۵) اضلاع BA و CD از چهارضلعی $ABCD$ یکدیگر را در O و اضلاع DA و CB یکدیگر را در O' قطع می‌کنند. روی خطوط OA، OC، $O'A$ و $O'C$ به‌ترتیب OE، OF، $O'E'$ و $O'F'$ را برابر AB، DC، AD و BC جدا می‌کنیم. ثابت کنید EF با $E'F'$ موازی است.

۳۶) نقطهٔ N تصویر نقطهٔ P از دایره‌ای به مرکز O روی قطر AOB از آن دایره است. روی امتداد PO پاره‌خط PQ را برابر با $۲AN$ جدا می‌کنیم. اگر AQ دایره را در نقطهٔ دیگری مانند R قطع کند، ثابت کنید که $\angle AOR = ۳\angle AOP$.

۳۷) اگر P نقطهٔ دلخواهی از یک نیمدایره به قطر AB، و BC و CD دو کمان مساوی باشند، و اگر $E = (CA, PB)$ و $F = (AD, PC)$ ثابت کنید که AD بر EF عمود است.

۳۸) در مثلث ODE ضلع OD کوچکتر از OE است و زاویهٔ O قائمه است. A و B دو نقطه از وتر DE

هستند به‌طوری که $\angle AOD = \angle BOD = 45^\circ$. نشان دهید که خط MO که از O به M، وسط DE وصل می‌شود بر دایرهٔ OAB مماس است.

۳۹) از نقطهٔ S دو مماس SA و SB و قاطع SPQ را بر یک دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید که $AP : AQ = BP : BQ$.

۴۰) روی امتداد شعاع OA از یک دایره نقطهٔ دلخواه P را انتخاب می‌کنیم؛ از نقطهٔ P مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم؛ OP را تا نقطهٔ Q، به‌طوری که $PQ = PT$ امتداد می‌دهیم و مماس QV را بر دایره رسم می‌کنیم؛ اگر VR را از V عمود بر OA رسم کنیم تا OA را در R قطع کند، ثابت کنید که $PR = PQ = PT$.

۴۱) خطی که از رأس B از مثلث ABC موازی با ضلع AC رسم می‌شود، مماس بر دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC در C را در B'، و خطی که از رأس C موازی با AB رسم می‌شود، مماس بر (O) در B را در C' قطع می‌کند. ثابت کنید که $BC^2 = BC'.B'C$.

۴۲) دو قاطع متغیر PQ و $P'Q'$ بر روی دو خط ثابت OPP' و OQQ' دو پاره‌خط PP' و QQ' با طولهای ثابت را جدا می‌کنند. اگر L و M دو نقطه روی PQ و $P'Q'$ باشند، به‌طوری که $PL : LQ = P'M : MQ'$ و این دو نسبت برابر مقداری ثابت باشند، ثابت کنید که LM اندازه و جهت ثابتی دارد.

۴۳) نقطهٔ M بر AM، بر نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث ABC واقع است. اگر Q و R تصویرهای نقطهٔ M به‌ترتیب بر اضلاع AC و AB باشند، نشان دهید که عمود MP از M بر ضلع BC، QR را در N قطع می‌کند که روی میانهٔ AA' از مثلث ABC قرار دارد.

۴۴) دایره‌ای در B بر ضلع AB از مثلث ABC مماس است و از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث می‌گذرد. این دایره AC را در H و K قطع می‌کند. ثابت کنید که IC نیمساز زاویهٔ HIK است.

۴۵) AB و CD دو وتر از یک دایره‌اند، و خطوطی که از A و B به وسط CD رسم می‌شوند با CD زاویه‌های برابر می‌سازند. نشان دهید خطوطی که از C و D به وسط AB رسم می‌شوند با AB زاویه‌های مساوی می‌سازند.

۴۶) سه جفت دایره (B)، (C)؛ (C)، (A)؛ (A)، (B) در D، E و F بر هم مماس‌اند. خطوط DE و DF دایرهٔ (A) را در G و H نیز قطع می‌کنند. نشان دهید که GH از مرکز (A) می‌گذرد و با خط‌المرکزین (B) و (C) موازی است.

۴۷) عمودمنصفهای اضلاع AC و AB از مثلث ABC اضلاع AB و AC را در P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که نقاط B، C، P و Q روی یک دایره قرار دارند و آن دایره از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد.

۴۸) MNP و $M'N'P'$ دو مماس بر دایرهٔ PQP' هستند، و AM، BN، AM' و BN' به‌ترتیب از دو نقطهٔ‌مفروض A و B بر آنها عمود شده‌اند. اگر $MP : PN = M'P' : P'N'$، ثابت کنید که دو مماس موازی‌اند.

۴۹) ABC مثلثی محاط شده در یک دایره است؛ DE قطری از دایره است که BC را در G نصف می‌کند؛ از E عمود EK را بر یکی از اضلاع مثلث رسم می‌کنیم و عمودی که از رأس A بر DE رسم می‌کنیم DE را در H قطع می‌کند. نشان دهید که EK بر دایرهٔ GHK مماس است.

۵۰) اگر نیمساز داخلی یک زاویه از مثلثی با یکی از دو ضلع آن زاویه برابر باشد، نشان دهید که تصویر ضلع دیگر بر روی این نیمساز بانصف مجموع دو ضلع زاویه برابر است.

۵۱) از دو نقطه که هر کدام روی یکی از دو ضلع روبرو به هم در یک متوازی‌الاضلاع قرار دارند، خطوطی به رأسهای اضلاع مقابل رسم می‌کنیم. ثابت کنید خط راستی که از نقاط برخورد این خطوط می‌گذرد مساحت متوازی‌الاضلاع را نصف می‌کند.

۵۲) نقطهٔ B وسط پاره‌خط AC است؛ دایرهٔ (A, AB) را رسم می‌کنیم و از C عمودی بر یک مماس دلخواه آن دایره رسم می‌کنیم. نشان دهید که $\angle ABD = ۳\angle BDC$.

۵۳) ارتفاع وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، آن مثلث را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم می‌کند. نشان دهید که خط‌المرکزین دایره‌های محاطی این دو مثلث با فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محاطی مثلث اصلی از رأس قائمهٔ این مثلث برابر است.

۵۴) ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است؛ D نقطه‌ای روی BC است به‌طوری که BD یک سوم BC است و E نقطه‌ای روی AB به فاصلهٔ برابر از A و D است. نشان دهید که $CE = EB + BD$.

۵۵) C وسط پاره‌خط AB و D نقطه‌ای از خط AB است که آن‌را به صورت داخلی یا خارجی به‌طور نامساوی تقسیم می‌کند. ثابت کنید که $AD^۲ + DB^۲ = ۲(AC^۲ + CD^۲)$.

۵۶) M وسط وتر AB از دایره‌ای به مرکز O است؛ دایره‌ای به قطر OM رسم می‌کنیم و از نقطهٔ دلخواه T بر روی این دایره مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا دایرهٔ خارجی (O) را در E قطع کند. ثابت کنید که $AE^۲ + BE^۲ = ۴ET^۲$.

۵۷) M، N، P و Q به‌ترتیب، وسط اضلاع AB، BC، CD و DA از مربع $ABCD$ هستند. ثابت کنید که از برخورد AN، BP، CQ و DM مربعی به دست می‌آید که‌مساحتش یک پنجم مربع $ABCD$ است.

۵۸) M و N نقاطی روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC هستند و خطوط BM و CN یکدیگر را روی ارتفاع AD از مثلث قطع می‌کنند؛ نشان دهید که AD نیمساز $\angle MDN$ است.

مکانهای هندسی

۵۹) A، B، C، و D نقاط ثابتی روی دایرهٔ (O) هستند. خطوطی که از C و D به نقطهٔ متغیر P وصل می‌شوند، (O) را در Q و R نیز قطع می‌کنند. مکان هندسی S، نقطهٔ دوم برخورد دو دایرهٔ PQB و PRA را بیابید.

۶۰) مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که دو دایرهٔ مفروض از آن نقطه با زاویه‌های برابر دیده شوند.

۶۱) دو نقطهٔ A و B هم‌خط با O، مرکز یک دایرهٔ مفروض، و قطر متغیر PQ از این دایره مفروض‌اند. مکان هندسی نقطهٔ دوم برخورد دو دایرهٔ APO و BQO را بیابید.

۶۲) روی اضلاع OA و OB از زاویهٔ مفروض O دو نقطهٔ متغیر A' و B' را مشخص می‌کنیم به‌طوری که نسبت $AA' : BB'$ مقدار ثابتی باشد، و روی پاره‌خط $A'B'$ نقطهٔ I را طوری برمی‌گزینیم که نسبت $A'I : B'I$ ثابت باشد. ثابت کنید که مکان هندسی نقطهٔ I یک خط راست است.

۶۳) دایرهٔ متغیری که از رأس یک زاویهٔ مفروض می‌گذرد، دو ضلع این زاویه را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. نشان دهید مکان هندسی دو انتهای قطر موازی با وتر AB از این دایره متشکل از دو خط راست است.

۶۴) AA' و BB' دو قطر عمود بر هم از دایرهٔ مفروض (O) هستند. وتر متغیری که از B می‌گذرد (O) را در M و AA' را در N قطع می‌کند. نشان دهید که نقطهٔ برخورد مماسی که در M بر دایرهٔ (O) رسم می‌شود، و خطی که در N بر AA' عمود می‌شود یک خط راست را می‌پیماید.

۶۵) دایرهٔ متغیر (C) که از مرکز O و یک نقطهٔ ثابت A از دایرهٔ (O) می‌گذرد، دایرهٔ (O) را در D نیز قطع

می‌کند. مکان هندسی نقطهٔ M، نقطهٔ برخورد مماسهای رسم شده بر (C) در O و D، را به دست آورید. نشان دهید که خط MC بر دایرهٔ ثابتی هم‌مرکز با (O)، مماس است.

۶۶) دایرهٔ متغیری در B و D بر دو ضلع OB و OD از زاویه‌ای ثابت مماس است؛ E نقطهٔ تماس این دایره با مماس دومی است که از نقطهٔ ثابت A روی خط OB، بر دایره رسم می‌شود. نشان دهید که خط DE از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۶۷) خط متغیر PAB که از نقطهٔ ثابت P می‌گذرد دو ضلع OA و OB از زاویهٔ مفروض O را در نقاط A و B قطع می‌کند. روی خطهای OA و OB نقطه‌های A' و B' را طوری برمی‌گزینیم که نسبتهای $OA : OA'$ و $OB : OB'$ ثابت باشند. ثابت کنید که خط $A'B'$ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۶۸) نشان دهید مکان‌هندسی نقطه‌ای درون یک زاویهٔ مفروض که نسبت فاصله‌هایش از دو ضلع این زاویه مقدار مفروض k است، خط راست ثابتی‌است که از رأس این زاویه می‌گذرد.

۶۹) نشان دهید که مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌هایش از دوخط متقاطع مفروض مقدار ثابتی است، متشکل از چهار خط راست است که از نقطهٔ برخورد این دو خط مفروض می‌گذرند.

۲

تشابه و تجانس

الف. تشابه

۲۳. روش تشابه. با در نظر نگرفتن یکی از شرایط مسئله می‌توان شکلی شبیه شکل مطلوب رسم کرد. معمولاً می‌توان با توجه به شکل رسم شده و شرط حذف شده جزئی را تعیین کرد که ما را قادر به حل مسئله کند. مثالهای زیر این روش را نشان می‌دهند.

۲۴. مسئله. مربعی را رسم کنید که مجموع ضلع و قطرش مفروض باشد.

چون همهٔ مربعها مشابه‌اند، از رسم یک مربع دلخواه شروع می‌کنیم. فرض کنید a' و d' به‌ترتیب، ضلع و قطر این مربع باشند و a و d را اجزای متناظر از مربع مطلوب در نظر بگیرید. با توجه به تشابه دو شکل داریم

$$\frac{a}{a'} = \frac{d}{d'} \qquad \text{یا} \qquad \frac{a+d}{a'+d'} = \frac{a}{a'}$$

سه جزء از تناسب اخیر را می‌دانیم، زیرا $a+d$ مفروض است؛ بنابراین، پاره‌خط a را می‌توان به عنوان چهارمین جزءِ تناسب رسم کرد و مسئله به رسم مربعی با ضلع مفروض تبدیل می‌شود.

۲۵. مسئله. مثلثی را رسم کنید که مشابه یک مثلث مفروض باشد و مساحت آن برابر مساحت یک مربع مفروض باشد.

با چشمپوشی از مساحت، مثلث $A'B'C'$ را مشابه مثلث مطلوب ABC رسم می‌کنیم. اگر $a' = B'C'$، h' ارتفاع وارد بر این ضلع، و m' ضلع مربعی باشد که مساحتش برابر $A'B'C'$ است، داریم

$$m'^{۲} = a' \times \frac{۱}{۲} h'$$

پس m' را می‌توان به عنوان جزءِ سوم یک تناسب رسم کرد.

اکنون می‌توان ضلع $a = BC$ را با توجه به تناسب زیر تعیین کرد

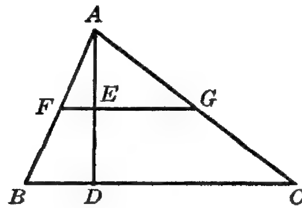
$$\frac{a}{a'} = \frac{m}{m'}$$

که در آن m ضلع مربع مفروض است، و مثلث مطلوب به آسانی رسم می‌شود.

روی ضلع $B'C'$، $B'C$ را برابر a جدا می‌کنیم. از C خطی به موازات $A'C'$ رسم می‌کنیم تا ضلع $A'B'$ را در رأس سوم مثلث مطلوب $AB'C$ قطع کند.

مسئله یک و تنها یک جواب دارد.

۲۶. مسئله. دو ضلع جانبی و نسبت قاعده به ارتفاع وارد بر قاعده از یک مثلث ($a : h_a = p : q$،c،b) مفروض است. مثلث را رسم کنید.



شکل۲۳

فرض کنید ABC مثلث مطلوب باشد (شکل ۲۳). روی ارتفاع AD پاره‌خط AE را برابر q جدا می‌کنیم و از نقطهٔ E خط FEG را به موازات BC رسم می‌کنیم. با توجه به مثلثهای متشابه AFG و ABC داریم

$$\frac{AF}{AG} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{FG}{AE} = \frac{BC}{AD} = \frac{p}{q}$$

پس $FG = p$.

پس در مثلث AFG که بامثلث مطلوب متشابه است، قاعدهٔ $FG = p$، ارتفاع $AE = q$ و نسبت دو ضلع $AF : AG = c : b$ را می‌دانیم؛ پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. پس از رسم AFG روی AF پاره‌خط AB را برابر c جدا می‌کنیم. خطی که از B به موازات FG رسم می‌شود، امتداد AG را در C، یعنی رأس سوم مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

مسئله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد، یا اصلاً جواب نداشته باشد.

۲۷. مسئله. از ذوزنقه‌ای طول دو ضلع ناموازی، زاویهٔ بین آنها و نسبت دو ضلع موازی مفروض است. ذوزنقه را رسم کنید.

فرض کنید $ABCD$ (شکل ۲۴) ذوزنقهٔ مطلوب، و E نقطهٔ برخورد دو ضلع ناموازی AD و BC باشد. مثلثهای ABE و DCE متشابه‌اند، پس

$$\frac{EC}{EB} = \frac{ED}{EA} = \frac{CD}{BA} = \frac{p}{q} \quad \text{(نسبت مفروض)}$$

یا

$$\frac{EC}{EB - EC} = \frac{ED}{EA - ED} = \frac{p}{q - p}$$

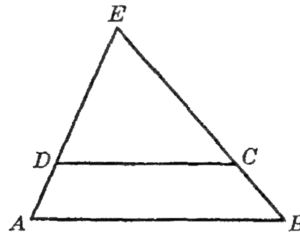
یا

$$\frac{EC}{CB} = \frac{ED}{DA} = \frac{p}{q - p}$$

پس پاره‌خطهای EC و ED، و در نتیجه مثلث DCE را که دو ضلع و زاویهٔ بین آنها را ازآن می‌دانیم می‌توان رسم کرد.

پس از رسم این مثلث، ED را امتداد می‌دهیم و طول مفروض DA را روی آن جدا می‌کنیم؛ خطی که از A به موازات CD رسم می‌شود، روی امتداد EC رأس چهارم B، از ذوزنقهٔ مطلوب $ABCD$، را تعیین می‌کند.

۲۸. مسئله. بر یک دایرهٔ مفروض مثلث متساوی‌الساقینی محیط کنید که نسبت ساق به قاعدهٔ آن مقدار مفروضی باشد.



شکل۲۴

همهٔ مثلثهای متساوی‌الساقینی که نسبت ساق به قاعدهٔ یکسانی دارند، متشابه‌اند، زیرا ارتفاع وارد بر قاعده آنها را به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابهی تقسیم می‌کند.

روی قاعدهٔ $B'C'$، که طول دلخواهی دارد، مثلث متساوی‌الساقین $A'B'C'$ را طوری رسم کنید که

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{p}{q} \quad \text{(نسبت مفروض)}$$

فرض کنید r' و h' شعاع دایرهٔ محاطی و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ این مثلث باشند و فرض کنید که r و h اجزای متناظر از مثلث مطلوب ABC باشند. با توجه به تشابه دو مثلث داریم

$$\frac{h}{h'} = \frac{r}{r'}$$

از این تناسب، سه جزءِ h'، r، r' معلوم‌اند، پس می‌توانیم h را رسم کنیم.

از نقطهٔ دلخواه D بر روی دایرهٔ مفروض، مماس t را رسم، و روی خطی که از D به مرکز دایره رسم می‌شود، DA را برابر h جدا کنید. مماسهایی که از A بر دایره رسم می‌شوند و مماس t مثلث مطلوب ABC را تشکیل می‌دهند.

۲۹. مسئله. پاره‌خط مفروض m را به سه قسمت a، b و c تقسیم کنید، به‌طوری که $a : b = p : q$ و $b : c = r : s$، در صورتی که p، q، r و s پاره‌خطهای مفروضی باشند.

اگر t را با توجه به تناسب

$$\frac{q}{t} = \frac{r}{s}$$

تعیین کنیم، خواهیم داشت

$$a : b : c = p : q : t$$

روی یک ضلع زاویهٔ دلخواه A پاره‌خط AM را برابر m و روی ضلع دیگر آن پاره‌خط AP را برابر p، PQ را برابر q و QT را برابر t جدا می‌کنیم. خطوطی که از نقاط P و Q به موازات خط MT رسم می‌شوند، AM را در نقاط X و Y قطع می‌کنند، به‌طوری که $AX = a$، $XY = b$ و $YM = c$.

۳۰. تعریف. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مفروض‌اند، به طوری که $\angle A = \angle A'$، $\angle B = \angle B'$، $\angle C = \angle C'$. اگر دورانی که نقاط A ، B و C، به همین ترتیب، مشخص می‌کنند پادساعتگرد باشد و دورانی که نقاط A'، B' و C' مشخص می‌کنند ساعتگرد باشد، یا برعکس؛ می‌گوییم دو مثلث متشابه معکوس هستند (یا دارای تشابه عکس هستند).

اگر جهت دوران ABC و $A'B'C'$ یکسان باشد می‌گوییم دو مثلث متشابه مستقیم هستند (یا دارای تشابه مستقیم هستند).

تمرین

۱) اگر دو ضلع از یک مثلث با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، و زاویهٔ روبروی ضلع بزرگتر (از دو ضلع مورد بحث) در یک مثلث با زاویهٔ متناظر در مثلث دیگر نیز برابر باشد، ثابت کنید که دو مثلث متشابه‌اند. حالتی را که زاویهٔ مفروض روبروی ضلع کوچکتر است بررسی کنید.

۲) نشان دهید که اگر اضلاع متناظر از دو مثلث بر هم عمود باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن مفروض است:

۳) A، B، $2p$ ۴) A، B، $b+c$ ۵) A، B، $h_a - h_b$

۶) $a:b:c$، R ۷) A، $a:c$، h_c ۸) A، $a:b$، $2p$

۹) $B-C$، $a:(b+c)$، $m_a + m_b$ ۱۰) $a:b$، $b:c$، $t_a + t_b - t_c$

۱۱) مثلثی را بامفروض بودن یک زاویه، نیمساز آن زاویه و نسبت دو پاره‌خطی که این نیمساز روی ضلع روبروی زاویهٔ مفروض جدا می‌کند، رسم کنید.

۱۲) محیط و نسبت مربعهای دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۳) از یک مثلث مساحت و زاویه‌هایی که یک میانه با دو ضلع واقع در دو طرف آن می‌سازد مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۴) متوازی‌الاضلاعی را با مفروض بودن نسبتهای یک ضلع به دو قطر و مساحت آن رسم کنید.

۱۵) یک دایره و امتداد دو شعاع از آن مفروض است. بین این دو شعاع خطی رسم کنید که بر دایره مماس باشد و توسط نقطهٔ تماس به نسبت مفروضی تقسیم شود.

۱۶) در یک دایرهٔ مفروض، مثلث متساوی‌الساقینی را که مجموع قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده از آن مفروض است، محاط کنید.

۱۷) از مثلثی a ، A و $mb+nc=s$ مفروض است، و m و n دو مقدار ثابت مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱۸) اگر یک زاویه از مثلثی با زاویه‌ای از مثلث دیگر برابر باشد و زاویهٔ دیگری از مثلث اول مکمل زاویهٔ دیگری از مثلث دوم باشد، نشان دهید که اضلاع روبروی زاویه‌های برابر با اضلاع روبروی زاویه‌های مکمل متناسب‌اند.

ب. تجانس

۳۱. تعریف. اگر اضلاع متناظر در دو چندضلعی متشابه موازی باشند، می‌گوییم دو چندضلعی به‌طور متشابه قرار گرفته‌اند یا متجانس‌اند.

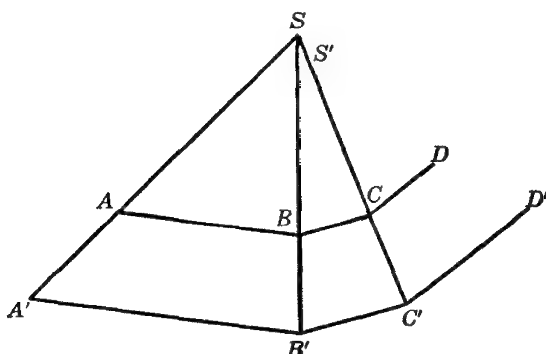
۳۲. قضیه. خطوطی که رأسهای متناظر دو چندضلعی متجانس را به هم وصل می‌کنند همرس‌اند (یعنی همه در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند).

فرض کنید $ABCD\dots$ و $A'B'C'D'\dots$ دو چندضلعی متجانس باشند و $S \equiv (AA', BB')$ (شکل ۲۵). برای اثبات قضیه باید نشان دهیم که خط واصل بین دو رأس متناظر بعدی C و C' نیز از S می‌گذرد. اگر CC' از S نگذرد، فرض می‌کنیم S' محل برخورد این خط با BB' باشد. با توجه به دو مثلث متشابه SAB و $SA'B'$، و همچنین دو مثلث متشابه $S'BC$ و $S'B'C'$ داریم

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{A'B'}{AB} \ , \ \frac{S'B'}{S'B} = \frac{B'C'}{BC}$$

ولی بنابر فرض،

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$$



شکل۲۵

پس،

$$\frac{SB'}{SB}=\frac{S'B'}{S'B} \quad \text{یا} \quad \frac{SB'}{SB-SB'}=\frac{S'B'}{S'B-S'B'}$$

یا

$$\frac{SB'}{BB'}=\frac{S'B'}{BB'}$$

پس S' بر S منطبق است.

۳۳. تعریف. نقطهٔ S (§۳۲) را مرکز تشابه یا مرکز تجانس دو چندضلعی می‌نامند.

نسبت ثابت

$$\frac{SA'}{SA}=\cdots=\frac{A'B'}{AB}=\cdots=k$$

را نسبت تشابه یانسبت تجانس دو شکل می‌نامند. این نسبت با یک عدد یا به صورت نسبت دو پاره‌خط مفروض، مثلاً p و q، داده می‌شود.

رابطهٔ بین دو شکل تجانس نامیده می‌شود.

۳۴. مسئله. چندضلعی $ABCD\ldots$ مفروض است. چندضلعی $A'B'C'D'\ldots$ را طوری رسم کنید که با چندضلعی اول متجانس باشد و نسبت تجانس مقدار مفروض k و مرکز تجانس نقطهٔ مفروض S باشد.

روی خطوط SA، SB، SC، ... (شکل ۲۶) که رأسهای A، B، C، ... از چندضلعی مفروض را به مرکز تجانس مفروض S وصل می‌کنند، نقاط A'، B'، C' و ... را طوری تعیین می‌کنیم که

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\cdots=k$$

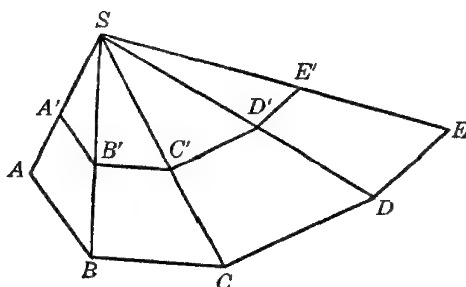
چندضلعی $A'B'C'D'\ldots$ که به این ترتیب رسم می‌شود شرایط مسئله را داراست.

در واقع، مثلثهای SAB و $SA'B'$ متشابه‌اند، پس $A'B'$ با AB موازی است و

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=k$$

و به همین‌ترتیب این رابطه برای جفتهای دیگر اضلاع دو چندضلعی نیز برقرار است. چون جفتهای متناظر دوچندضلعی باهم موازی‌اند، زاویه‌های متناظر با هم برابرند. پس دوچندضلعی متشابه‌اند، به‌طور متشابه قرار گرفته‌اند و نسبت تشابه آنها برابر مقدار مفروض k است و روشن است که همهٔ خطوط واصل بین رأسهای متناظر

دوچندضلعی از نقطهٔ S می‌گذرند.



شکل۲۶

۳۵. تعریف. نقاط A و A'، B و B'، ... (§۳۴) نقاط متناظر، یانقاط همتا یا نقاط متجانس در تجانس نامیده می‌شوند.

نسبت تجانس، k، ممکن است مثبت یا منفی باشد. در صورت مثبت بودن نسبت تجانس، نقاط همتا در یک طرف مرکز تجانس قرار دارند و می‌گوییم دو چندضلعی دارای تجانس مستقیم هستند؛ در صورت منفی بودن نسبت تجانس، نقاط همتا در دو طرف مرکز تجانس قرار دارند و می‌گوییم دو چندضلعی دارای تجانس معکوس هستند.

حالت مربوط به $k = -1$ مورد توجه خاص است. در این حالت مرکز تجانس S وسط پاره‌خطهای واصل بین نقاط متناظر دو چندضلعی است. در این حالت می‌گوییم که چندضلعیها نسبت به نقطهٔ S متقارن‌اند، و نقطهٔ S مرکز تقارن آنها نامیده می‌شود.

تجانس به مرکز S و به نسبت k را برای اختصار به صورت (S, k) نشان می‌دهیم.

۳۶. تعمیم. روشن است که اگر مرکز تجانس S و نسبت تجانس k مفروض باشند، چه نقاط مفروض A، B، C، ... رأسهای یک چندضلعی محدب باشند و چه نباشند می‌توان نقاط A'، B'، C'، ... را تعیین کرد. بنابراین، می‌توانیم مفهوم شکلهای متجانس را به صورت زیر گسترش دهیم. با مفروض بودن شکل (F) متشکل از نقاط A، B، C، ...، که به صورت دلخواهی در صفحه توزیع شده‌اند، نقطهٔ ثابت S و نسبت ثابت k را برمی‌گزینیم و نقاط A'، B'، C'، ... را روی خطوط SA، SB، SC، ... طوری تعیین می‌کنیم که

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \cdots = k$$

شکل (F') متشکل از نقاط جدید A'، B'، C'، ... که به این ترتیب تعیین شده‌اند بنابر تعریف، با شکل (F) متجانس است و S و k به ترتیب، مرکز تجانس و نسبت تجانس هستند.

مفهوم شکلهای متجانس را می‌توان بیش از این نیز گسترش داد. به هیچ وجه لازم نیست که شکل مفروض (F)، چنانچه تاکنون فرض کرده‌ایم، از نقاط مجزا تشکیل شده باشد. می‌توانیم فرض کنیم که نقطهٔ M از شکل (F) روی خم پیوستهٔ (C) حرکت می‌کند. اگر برای همهٔ مواضع نقطهٔ M ، نقطهٔ متجانس M' را بیابیم، خم (C') از شکل (F') را خواهیم یافت، و این خم را متجانس خم (C) می‌نامیم.

به‌خصوص، مواردی را که نقطهٔ M یک خط راست یا یک دایره را می‌پیماید، مورد توجه قرار می‌دهیم.

۳۷. قضیه. دو شکل متجانس مفروض‌اند. اگر نقطه‌ای متعلق به یکی از شکلها یک خط راست را بپیماید، نقطهٔ همتا در شکل دوم هم یک خط راست را می‌پیماید و این دو خط موازی‌اند.

فرض کنید نقطهٔ M خط راست u را در شکل (F) بپیماید. فرض کنید P، Q، و R سه موضع M و P'، Q'، و R' نقاط متناظر در شکل متجانس (F') باشند. با توجه به دو مثلث متشابه SPQ و $SP'Q'$ و همچنین دو مثلث متشابه SQR و $SQ'R'$ نتیجه می‌گیریم که PQ و $P'Q'$ دو خط موازی و QR و $Q'R'$ نیز دو خط موازی‌اند. حال چون P، Q، و R همخط‌اند، و دو خط $P'Q'$ و $Q'R'$ دارای نقطهٔ مشترک Q' هستند، سه نقطهٔ P'، Q'، و R' هم همخط‌اند. اما خط PQ توسط دو نقطهٔ P و Q، و خط $P'Q'$ توسط دو نقطهٔ P' و Q' تعیین می‌شود؛ پس استدلال فوق نشان می‌دهد که برای هر نقطهٔ R از خط u، نقطهٔ متناظر، یعنی R'، باید روی خط $P'Q'$ باشد، و این اثبات قضیه را کامل می‌کند.

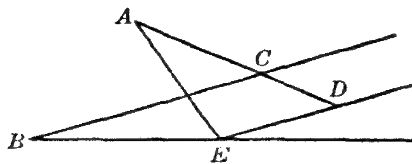
۳۸. ملاحظهٔ ۱. این قضیه معمولاً به صورت خلاصه‌تر زیر بیان می‌شود: شکل متجانس یک خط راست، خط راستی موازی با آن است.

۳۹. ملاحظهٔ ۲. اگر دو شکل (F) و (F') دارای تجانس مستقیم باشند، ترتیب PQR و $P'Q'R'$ روی دو خط موازی یکسان است. اگر دو شکل (F) و (F') دارای تجانس معکوس باشند، ترتیب PQR و $P'Q'R'$ عکس یکدیگرند.

۴۰. نتیجه. زاویه‌های متناظر در دو شکل متجانس برابرند، زیرا هر دو ضلع متناظر در دو زاویه موازی‌اند و در هر دو جفت از این خطهای متناظر، یا دو خط در یک جهت‌اند یا در جهتهای عکس یکدیگرند.

۴۱. مسئله. از یک نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید به‌طوری که پاره‌خطی که دو ضلع زاویهٔ مفروضی روی آن جدا می‌کنند، توسط آن نقطه به نسبتی مفروض تقسیم شود.

روی خط AC (شکل ۲۷) که نقطهٔ مفروض A را به نقطهٔ دلخواه C روی ضلع BC از زاویهٔ مفروض CBE وصل می‌کند، پاره‌خط AD را طوری جدا می‌کنیم که نسبت $AC : AD$ برابر نسبت مفروض $p : q$ باشد. پس نقاط C و D در تجانس $(A, p : q)$ متناظر با یکدیگرند؛ بنابراین، وقتی نقطهٔ C خط مفروض BC را می‌پیماید، نقطهٔ D خطی موازی BC را می‌پیماید. اگر نقطهٔ برخورد این خط موازی با ضلع دیگر زاویهٔ مفروض را E بنامیم، AE خط مطلوب خواهد بود.

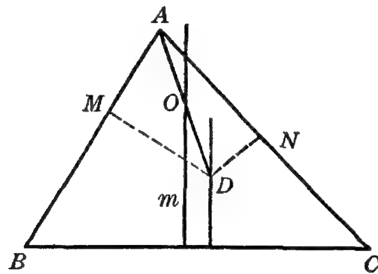


شکل ۲۷

۴۲. مسئله. از نقطهٔ متغیر D داخل مثلث ABC عمودهای DM و DN را به‌ترتیب، بر اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. اگر $CN \cdot AC = BM \cdot AB$ ، مکان هندسی نقطهٔ D را بیابید.

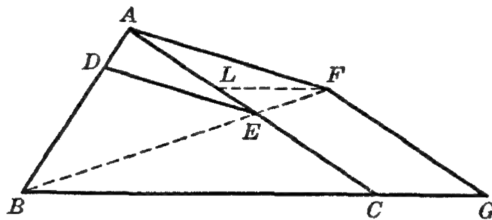
نقاط A، M، D، و N (شکل ۲۸) روی دایرهٔ (O)، که مرکزش وسط پاره‌خط AD است، قرار دارند. از طرف دیگر برابری مفروض نشان می‌دهد که مربع مماسهایی که از نقاط B و C بر (O) رسم می‌شوند برابرند؛ پس $CO = BO$ (§۱۱، مکان هندسی ۲). پس مکان هندسی نقطهٔ O، عمودمنصف ضلع BC است (خط m). بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ D خط راستی است متناظر با خط m در تجانس $(A, ۲)$.

۴۳. مسئله. خطی رسم کنید که دو ضلع AB و AC از مثلث مفروض ABC را به ترتیب در نقاط D و E قطع کند، به طوری که $BD = DE = EC$.



شکل۲۸

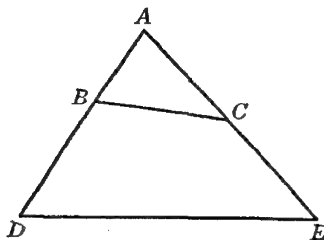
فرض کنید $ABCDE$ (شکل ۲۹) شکل مطلوب باشد. اگر خطی که از نقطهٔ A به موازات DE رسم می‌شود، خط BE را در نقطهٔ F قطع کند، و خطی که از F به موازات AC رسم می‌شود، BC را در G قطع کند، روشن است که چهارضلعیهای $BDEC$ و $BAFG$ متجانس‌اند و B مرکز تجانس آنهاست؛ پس $BA = AF = FG$. حال می‌توان چهار ضلعی $BAFG$ را به روش زیر رسم کرد. روی CA پاره‌خط CL را برابر با AB جدا می‌کنیم و اگر خطی که از L به موازات BC رسم می‌شود دایرهٔ (A, AB) را در F قطع کند، خطی که از F به موازات AC رسم می‌شود BC را در G که رأس چهارم از چهارضلعی مطلوب است قطع می‌کند.



شکل۲۹

خطی که از نقطهٔ $E = (AC, BF)$ به موازات AF رسم می‌شود، قاطع مطلوب است.

۴۴. مسئله. از مثلثی زاویهٔ مقابل قاعده و مجموع قاعده با هر یک از دو ضلع دیگر مفروض است $(a + c, a + b, A)$. این مثلث را رسم کنید.



شکل۳۰

فرض کنید ABC (شکل ۳۰) مثلث مطلوب باشد. AB و AC را امتداد می‌دهیم. BD را برابر BC و CE را برابر BC جدا می‌کنیم؛ پس $AD = a + c$، $AE = a + b$ و مثلث DAE را می‌توان رسم کرد، زیرا دو

ضلع و زاویهٔ بین آنها از این مثلث معلوم است. برای رسیدن از این مثلث به مثلث مطلوب ABC باید خط BC را طوری رسم کنیم که داشته باشیم $DB = BC = CE$؛ پس مسئله به مسئلهٔ قبل (§۴۳) تبدیل می‌شود.

تمرین

۱) نشان دهید که هر تجانس را می‌توان بامفروض بودن: (الف) مرکز تجانس و یک جفت از نقطه‌های متناظر؛ (ب) نسبت تجانس و یک جفت از نقطه‌های متناظر؛ (ج) دو جفت از نقطه‌های متناظر؛ تعیین کرد.

۲) شکلهای متجانس با متوازی‌الاضلاع، متجانس با مستطیل، و متجانس بامربع، چه شکلهایی هستند؟

۳) A، A' و B، B' دو جفت از نقطه‌های همتا در دو شکل متجانس (F) و (F') هستند، و M نقطه‌ای از شکل (F) است. خطوطی که از نقاط A' و B' به ترتیب، به موازات خطوط AM و BM رسم می‌شوند یکدیگر را در M' قطع می‌کنند. ثابت کنید که M و M' دو نقطهٔ متناظر در دو شکل (F) و (F') هستند.

۴) نشان دهید که اگر دو مثلث متجانس باشند، مرکزهای دایره‌های محیطی و محاطی و ... نقاط متناظر، و ارتفاعها، میانه‌ها و ... خطهای متناظر در شکلهای متجانس هستند.

۵) دو خط مفروض یکدیگر را در نقطه‌ای دور از دسترس قطع می‌کنند. از یک نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید که با این دو خط همرس باشد.

۶) مثلثی را رسم کنید که A، $a - b$ و $a - c$ از آن مفروض است.

۷) مثلثی را رسم کنید که A، $a + b$ و $a - c$ از آن مفروض است.

۸) خطی به موازات قاعدهٔ یک ذوزنقهٔ مفروض رسم کنید، به‌طوری که قطرهای ذوزنقه پاره‌خطی را که دو ضلع ناموازی ذوزنقه روی آن خط جدا می‌کنند، به سه قسمت مساوی تقسیم کنند.

۹) یک دایره و محل دو شعاع از آن مفروض است. وتری در این دایره رسم کنید که توسط این دو شعاع به سه قسمت مساوی تقسیم شود.

۱۰) از یک مثلث یک میانه و زاویه‌هایی که این میانه با دو ضلع کناری‌اش می‌سازد مفروض است. این مثلث را رسم کنید.

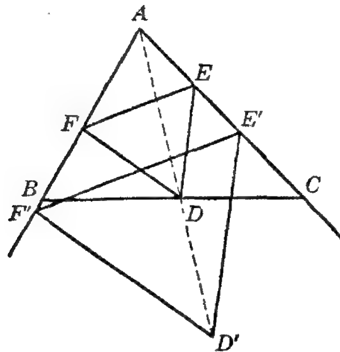
۱۱) از یک نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید به‌طوری که دو پاره‌خطی که توسط سه خط همرس مفروض روی این خط جدا می‌شوند دارای نسبت مفروضی باشند.

۱۲) سه خط همرس و یک خط دیگر مفروض‌اند. قاطعی رسم کنید به‌طوری که سه پاره‌خط جدا شده روی آن توسط این چهار خط دارای نسبتهای مفروضی باشند.

۴۵. مسئله. در یک مثلث مفروض مثلثی محاط کنید به‌طوری که اضلاع آن با اضلاع یک مثلث مفروض دیگر موازی باشد.

فرض کنید DEF (شکل ۳۱) مثلث مطلوب باشد که در مثلث مفروض ABC محاط شده است. خط دلخواه $E'F'$ را به موازات EF رسم می‌کنیم تا خطوط AC و AB را به ترتیب، در E' و F' قطع کند. از E' و F' به ترتیب خطوطی به موازات ED و FD رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D' قطع کنند. مثلثهای DEF و $D'E'F'$ متجانس‌اند و نقطهٔ $A = (EE', FF')$ مرکز تجانس آنهاست؛ پس نقاط D، D' و A همخط‌اند. مثلث $D'E'F'$ را به آسانی می‌توان رسم کرد و خط AD' ضلع BC را در رأس D از مثلث مطلوب قطع می‌کند؛ این ترسیم را به آسانی می‌توان کامل کرد.

مسئله یک و تنها یک جواب دارد.



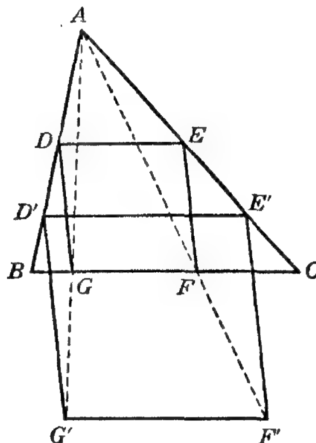
شکل۳۱

۴۶. مسئله. در یک مثلث مفروض متوازی‌الاضلاعی محاط کنید که یک زاویهٔ مفروض داشته باشد و دو ضلع مجاورش دارای نسبت مفروضی باشند.

فرض کنید $DEFG$ (شکل ۳۲) متوازی‌الاضلاع مطلوب باشد که در مثلث مفروض ABC محاط شده است. خط دلخواه $D'E'$ را به موازات DE رسم کنید تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در D' و E' قطع کند. از D' خطی به موازات DG رسم کنید و روی آن $D'G'$ را طوری جدا کنید که داشته باشیم

$$D'E' : D'G' = DE : DG = k \quad (\text{نسبت مفروض})$$

از E' و G' به‌ترتیب خطوطی به موازات EF و GF رسم کنید.



شکل۳۲

متوازی‌الاضلاعهای $DEFG$ و $D'E'F'G'$ متجانس‌اند و نقطهٔ $A = (DD', EE')$ مرکز تجانس آنهاست؛ پس هر یک از جفت نقطه‌های F، F' و G، G' با نقطهٔ A همخط‌اند. اکنون به آسانی می‌توان متوازی‌الاضلاع $D'E'F'G'$ را رسم کرد؛ خطوط AF' و AG' ضلع BC را در دو رأس F و G از متوازی‌الاضلاع مطلوب $DEFG$ قطع می‌کنند و به آسانی می‌توان ترسیم $DEFG$ را کامل کرد.

برای سادگی می‌توان ضلع $D'E'$ از متوازی‌الاضلاع $D'E'F'G'$ را روی قاعدهٔ BC از مثلث ABC در نظر گرفت.

تمرین

۱) در یک مثلث مفروض مثلثی محاط کنید که اضلاع آن با نیمسازهای داخلی مثلث مفروض موازی باشند. هر دو جواب مسئله را بیابید.

۲) در یک مثلث مفروض مثلثی محاط کنید که اضلاع آن بر اضلاع مثلث مفروض عمود باشد. هر دو جواب مسئله را بیابید.

۳) در یک مثلث مفروض مربعی محاط کنید.

۴) در یک مثلث مفروض مستطیلی متشابه با یک مستطیل مفروض محاط کنید.

۵) در یک مثلث مفروض، متوازی‌الاضلاعی محاط کنید که نسبت دو ضلع و زاویهٔ بین قطرهایش مفروض است.

۶) مثلث ABC مفروض است. مربعی رسم کنید که دو رأس آن روی BA و CA، یا امتداد آنها، و دو رأس دیگرش روی ضلع BC باشند.

۷) در یک نیمدایرهٔ مفروض مستطیلی متشابه با یک مستطیل مفروض محاط کنید.

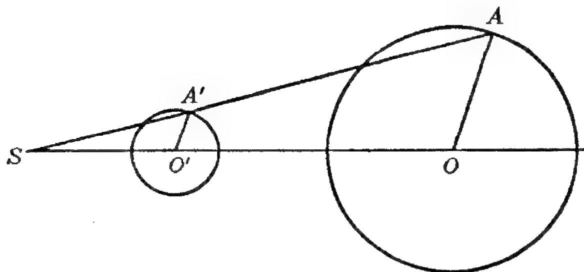
۸) در یک قطاع مفروض از دایره مربعی محاط کنید. دو حالت در نظر بگیرید: (i) یک رأس، (ii) دو رأس روی محیط دایره قرار داشته باشند.

۹) مربعی رسم کنید که دو رأس آن روی یک خط مفروض و دو رأس دیگر آن روی یک دایرهٔ مفروض باشند.

۱۰) خطی به موازات قاعدهٔ یک مثلث مفروض رسم کنید به‌طوری که پاره‌خطی که توسط دو ضلع دیگر مثلث روی آن جدا می‌شود از نقطهٔ مفروضی روی قاعده با زاویهٔ مفروضی دیده شود.

۱۱) مربعی در مثلث ABC محاط شده است و دو رأس این مربع روی ضلع BC قرار دارند. اندازهٔ BC برابر a و اندازهٔ ارتفاع وارد بر BC برابر h و اندازهٔ ضلع مربع برابر m است. نشان دهید که $m(a+h) = ah$.

۴۷. قضیه. دو شکل متجانس مفروض‌اند؛ اگر نقطه‌ای از شکل اول دایره‌ای را بپیماید، نقطهٔ متناظر در شکل دوم نیز دایره‌ای را خواهد پیمود.



شکل ۳۳

تجانس (S, k) را در نظر بگیرید. فرض کنید O (شکل ۳۳) مرکز و A نقطه‌ای از دایرهٔ متعلق به شکل اول باشد و O' و A' نقاط متجانس آنها در شکل دوم باشند. با توجه به طریقهٔ انتخاب این نقطه‌ها روشن است که مثلثهای SOA و $SO'A'$ متشابه‌اند؛ پس، $O'A' : OA = SA' : SA = k$؛ پس $O'A' = kOA$. پس طول $O'A'$ ثابت است، یعنی وقتی که نقطهٔ A دایره‌ای را می‌پیماید، نقطهٔ متناظرش A' طوری حرکت می‌کند که فاصله‌اش تا نقطهٔ ثابت O' مقدار ثابت $k \cdot OA$ باقی می‌ماند. پس A' دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $k \cdot OA$

را می‌پیماید.

این قضیه معمولاً به این‌صورت خلاصه‌تر بیان می‌شود: شکل متجانس با دایره، دایره است.

نکته. باید به دقت ملاحظه کنید که (الف) O و O'، مرکزهای دو دایرهٔ متجانس نقاط متناظری از دو شکل متجانس هستند، و (ب) نسبت شعاع دایره‌ها برابر نسبت تجانس است.

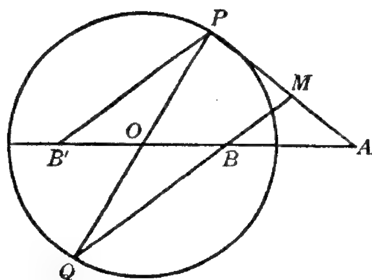
اگر یکی از دایره‌ها از مرکز تجانس بگذرد، دایرهٔ دیگر هم از آن مرکز خواهد گذشت و دو دایره در این نقطه بر هم مماس خواهند بود.

۴۸. مسئله. اگر PQ قطر متغیری از یک دایرهٔ مفروض باشد، و A و B دو نقطهٔ ثابت همخط بامرکز دایره، یعنی O، باشند، مکان هندسی نقطهٔ $M = (AP, BQ)$ را تعیین کنید.

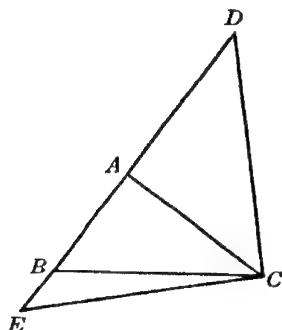
اگر B' نقطهٔ متقارن B نسبت به O باشد (شکل ۳۴)، دو مثلث OQB و OPB' همنهشت‌اند و از برابری زاویه‌های این دو مثلث نتیجه می‌شود که خطوط BM و PB' موازی‌اند؛ پس،

$$AM : AP = AB : AB'$$

نسبت دوم را می‌دانیم، پس دو نقطهٔ متغیر P و M با نقطهٔ ثابت A همخط‌اند و نسبت فاصله‌هایشان از A ثابت است. یا به عبارت دیگر، نقاط P و M نقاط متناظر یکدیگر در تجانس (A ،$AB' : AB$) هستند، و چون P دایرهٔ مفروض را می‌پیماید، مکان هندسی M نیز دایره‌ای با مرکز و شعاع معلوم است (§۴۷).



شکل۳۴



شکل۳۵

۴۹. مسئله. از مثلثی قاعده، زاویهٔ روبروی قاعده و نسبت مجموع دو ضلع دیگر مثلث به تفاضل آن دو ضلع مفروض است [a،A ،$(b+c) : (b-c) = p : q$]؛ این مثلث را رسم کنید.

فرض کنید ABC (شکل ۳۵) مثلث مطلوب باشد. AE و AD را برابر AC جدا می‌کنیم. داریم (بندهای ۱۷ و ۱۸)

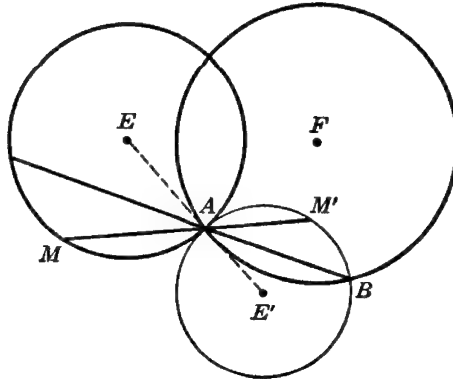
$$\angle BDC = \frac{۱}{۲}A \ , \ \angle BEC = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}A$$

پس برای هر کدام از نقاط E و D یک مکان هندسی مشخص می‌شود (§۱۱، مکان هندسی ۷). ولی دو نقطهٔ متغیر E و D با نقطهٔ ثابت B همخط‌اند و نسبت $BD : DE$ مفروض است؛ پس این دو نقطه، دو نقطهٔ متناظر در تجانس $(B, -p : q)$ هستند. پس با توجه به مکان‌هندسی مربوط به E می‌توانیم یک مکان‌هندسی برای D به دست آوریم و این مکان هندسی به همراه مکان هندسی دیگری که قبلاً برای D تعیین کردیم موضع نقطهٔ D را تعیین می‌کند. عمودمنصف DC خط DBE را در رأس سوم مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

به عنوان تمرین، شکل کاملی برای این مسئله رسم کنید.

۵۰. مسئله. از یک نقطهٔ برخورد دو دایره خطی رسم کنید به‌طوری که وترهایی که در دو دایره ایجاد می‌کند نسبت مفروضی داشته باشند.

فرض کنید A (شکل ۳۶) یک نقطهٔ مشترک دو دایره (E) و (F)، و M نقطه‌ای دلخواه روی (E) باشد.



شکل۳۶

روی خط AM نقطهٔ M' را طوری تعیین می‌کنیم که $AM' : AM = -k$، که در این رابطه، k نسبت مفروض است. وقتی نقطهٔ M دایرهٔ (E) را می‌پیماید، نقطهٔ M' دایرهٔ (E') را که متناظر (E) در تجانس $(A, -k)$ است می‌پیماید. اگر B نقطهٔ مشترک دوم دایره‌های (E') و (F) باشد، خط AB قاطع مطلوب خواهد بود.

دو دایرهٔ (E') و (F) در نقطهٔ A مشترک‌اند و نمی‌توانند بر یکدیگر مماس باشند (§۴۷)، پس همیشه نقطهٔ B وجود خواهد داشت.

اگر علامت نسبت k مشخص نشده باشد، نقطهٔ M' را می‌توان طوری رسم کرد که M و M' هر دو در یک طرف نقطهٔ A یا در دو طرف نقطهٔ A باشند، و مسئله دو جواب خواهد داشت. به‌علاوه، اگر در مسئله قید نشده باشد که در تشکیل نسبت مفروض k باید کدام دایره را دایرهٔ اول به حساب آورد، مسئله چهار جواب خواهد داشت.

به عنوان تمرین، شکل کاملی برای این مسئله رسم کنید و در آن همهٔ دایره‌هایی را که در راه‌حل مسئله به‌کار گرفته شده‌اند رسم کنید.

تمرین

۱) از نقطه مفروضی از یک دایره وتری رسم کنید که توسط وتر مفروضی از آن دایره نصف شود.

۲) از یک نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید به‌طوری که پاره‌خطی که توسط یک خط مفروض در یک دایرهٔ مفروض روی آن جدا می‌شود، توسط آن نقطهٔ مفروض به نسبت مفروضی تقسیم شود.

۳) از یک نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید به‌طوری که نسبت فاصله‌های نقطهٔ مفروض تا دو نقطهٔ برخورد خط با یک دایرهٔ مفروض، مقدار مفروضی باشد.

۴) دو نقطه، هر یک روی یکی از دو دایرهٔ مفروض چنان بیابید که با نقطهٔ مفروضی همخط و از آن به یک فاصله باشند.

۵) از مثلثی دو ضلع و نیمساز زاویهٔ بین آن دو ضلع (b, c, t_a) مفروض است. این مثلث را رسم کنید.

۶) خطی رسم کنید که دو دایرهٔ هم‌مرکز روی آن وترهایی با نسبت مفروض جدا کنند.

۷) سه دایرهٔ هم‌مرکز مفروض‌اند؛ قاطعی رسم کنید به‌طوری که پاره‌خط بین دایرهٔ اول و دایرهٔ دوم با پاره‌خط بین دایرهٔ دوم و دایرهٔ سوم هم‌اندازه باشد.

۸) نقطهٔ متغیر P روی دایرهٔ ثابتی به مرکز C حرکت می‌کند و A نقطهٔ ثابتی است. مکان هندسی نقطهٔ برخورد خط AP و نیمساز داخلی زاویهٔ ACP را به دست آورید.

۹) یک مثلث متغیر، قاعده‌ای ثابت و دایرهٔ محیطی ثابتی دارد. مکانهای هندسی نقطه‌های وسط دو ضلع جانبی، و مکان هندسی وسط پاره‌خطی را که نقطه‌های وسط این دو ضلع را به هم وصل می‌کند به دست آورید.

۱۰) از دو نقطهٔ مفروض B و C عمودهای BB' و CC' را بر خط متغیر $AB'C'$ که از نقطهٔ ثابت A، همخط با B و C می‌گذرد، رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ $M=(BC', B'C)$ را بیابید.

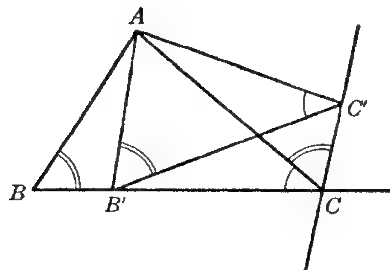
۱۱) روی قاعدهٔ BC از مثلث مفروض ABC نقطهٔ P را طوری تعیین کنید که $AP^2 : BP\cdot PC$ مقدار مفروضی داشته باشد.

۵۱. قضیه. اگر یک رأس از مثلث متغیری ثابت باشد، رأس دوم آن خط راست مفروضی را بپیماید و مثلث همواره با مثلث مفروضی متشابه باشد، آنگاه رأس سوم مثلث خط راستی را می‌پیماید.

فرض کنید A (شکل ۳۷) رأس ثابت باشد و ABC موضعی از مثلث متغیر باشد که قاعدهٔ BC از مثلث روی خط مفروض p قرار می‌گیرد. $AB'C'$ موضع دلخواه دیگری از مثلث متغیر را نشان می‌دهد. پاره‌خط AB' از نقاط C و C' با زاویه‌های مساوی دیده می‌شود؛ پس چهارضلعی $AB'CC'$ یک چهارضلعی محاط در دایره است (§۲۵۲) و $\angle ACC' = \angle AB'C'$. پس

$$\angle BCC' = \angle BCA + \angle ACC' = \angle BCA + \angle AB'C'$$

دو زاویهٔ آخری معلوم‌اند؛ پس خط CC' با خط مفروض p زاویهٔ ثابتی می‌سازد. به‌علاوه، C نقطهٔ ثابتی است؛ پس CC' خط ثابتی است، و قضیه اثبات شده است.



شکل ۳۷

۵۲. ملاحظه. باید ملاحظه کنید که نقطهٔ C بر روی خط p، توسط خطی که از A می‌گذرد و با p زاویه‌ای برابر با زاویهٔ مفروض C می‌سازد، تعیین می‌شود، و خط CC' با p زاویه‌ای برابر زاویهٔ مفروض A می‌سازد.

مکان هندسی رأس سوم، یعنی C با در نظر گرفتن زاویه‌های مفروض مثلث به ترتیبی معین به دست آمد، یعنی یک زاویه را در رأس ثابت A، و زاویهٔ دوم را در رأس B که خط مفروض p را می‌پیماید، قرار دادیم. اگر مسئله هیچ شرطی را برای انتساب زاویه‌ها قید نکرده باشد، انتساب زاویه‌ها را می‌توان به شش طریق مختلف انجام داد.

به‌علاوه، پس ازانتخاب زاویه‌های A و B، نقطهٔ C بر روی خط p را می‌توان در هر دو طرف خط AB

انتخاب کرد. پس مکان هندسی کامل نقطهٔ C شامل دوازده خط است. این خطوط شش جفت خط موازی هستند.

۵۳. قضیه. اگر یک رأس مثلث متغیری ثابت باشد، رأس دوم دایرهٔ مفروضی را بپیماید و مثلث همواره با مثلث مفروضی متشابه باشد، رأس سوم این مثلث یک دایره را می‌پیماید.

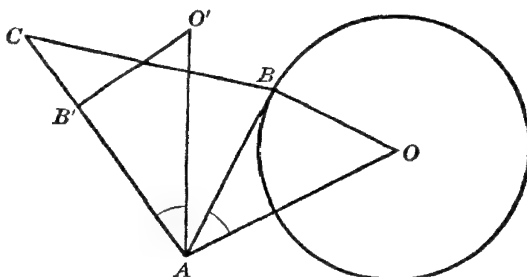
فرض کنید ABC (شکل ۳۸) یک موضع مثلث متغیر باشد، که در آن A رأس ثابت است و B روی دایرهٔ مفروض به مرکز O، قرار دارد. روی AC، AB' را برابر AB جدا کنید و روی AB' مثلث $AO'B'$ را همنهشت با AOB رسم کنید، به طوری که دو مثلث به‌طور متشابه قرار گرفته باشند، یعنی بتوان با دوران AOB حول رأس A آن‌را بر روی $AO'B'$ منطبق کرد.

چون بنابر شیوهٔ ترسیم فوق، $\angle O'AB' = \angle OAB$، داریم $\angle O'AO = \angle B'AB$. زاویهٔ دوم در آخرین تساوی مفروض است، پس AO' با خط ثابت AO زاویهٔ ثابتی می‌سازد؛ پس راستای AO' ثابت است. به‌علاوه، AO' با طول مفروض AO برابر است؛ پس نقطهٔ O' ثابت است و چون $O'B' = OB$، نقطهٔ B' یک دایره، (B')، را می‌پیماید. چون مثلث ABC همواره با مثلث مفروضی متشابه است، داریم

$$AC : AB' = AC : AB$$

پس مکان هندسی C یک دایره، (O'')، است که با مکان هندسی B' متجانس است، و قضیه اثبات می‌شود.

به عنوان تمرین، نشان دهید که مثلث AOO''، که O'' مرکز دایره (O'') است، با مثلث مفروض تشابه مستقیم دارد.



شکل۳۸

نکته. اگر دایرهٔ مفروض (O)، که مسیر رأس B است، به‌طور صلب حول نقطهٔ ثابت مفروض A به اندازهٔ زاویهٔ مفروض BAC دوران کند مکان جدید این دایره همان (B') یعنی مکان‌هندسی نقطهٔ B' است. مکان هندسی C دایره‌ای است که در تجانس $(A, AC : AB)$ با دایرهٔ (B') متناظر است.

در مورد قضیهٔ قبلی (§۵۱) نیزمی‌توان مطلب مشابهی را مشاهده کرد.

بسته به انتساب زاویه‌های ABC، ملاحظهٔ مربوط به قضیهٔ قبل (§۵۲) در اینجا نیز مصداق دارد.

تمرین

۱) مثلثی را رسم کنید که با مثلث مفروضی متشابه باشد، یک رأس آن در نقطهٔ ثابت مفروضی باشد، و دو رأس دیگر آن روی دو خط مفروض قرار داشته باشند.

۲) نقطه‌ای بر روی یک ضلع مثلث مفروضی مشخص شده است. در این مثلث مثلثی محاط کنید که یک رأس آن این نقطهٔ مفروض و با مثلث مفروض دیگری متشابه باشد.

۳) سه خط و یک مثلث مفروض‌اند. مثلثی رسم کنید که رأسهای آن روی این سه خط قرار داشته باشند و

با مثلث مفروض متشابه باشد.

۴) رأس A از مثلث متغیر APQ ثابت است و P روی خط ثابت CD حرکت می‌کند؛ AP خط ثابتی موازی با CD را در R قطع می‌کند، و $PQ = AR$؛ زاویهٔ APQ ثابت است. ثابت کنید که مکان هندسی Q یک خط راست است.

۵) شش ضلعی منتظم متغیری یک رأس ثابت دارد و مرکزش روی خط راستی حرکت می‌کند. نشان دهید که رأسهای دیگر شش‌ضلعی روی خطوط راستی حرکت می‌کنند و این خطوط همرس‌اند.

۶) مثلثی متشابه با یک مثلث مفروض رسم کنید به‌طوری که یک رأس آن در نقطه‌ای مفروض و دو رأس دیگر آن روی دو دایره قرار داشته باشند.

۷) مثلثی متشابه با یک مثلث مفروض رسم کنید به‌طوری که رأسهای آن روی سه دایرهٔ مفروض قرار داشته باشند.

۸) مثلثی متشابه با یک مثلث مفروض رسم کنید، به‌طوری که یک رأس آن در نقطه‌ای مفروض، رأس دیگر آن روی یک دایرهٔ مفروض، و رأس سوم آن روی یک خط مفروض قرار داشته باشد.

تمرینهای تکمیلی

۱) سه خط AL، BL و CL که سه رأس مثلث ABC را به نقطهٔ L وصل می‌کنند، اضلاع BC، AC، و AB را به ترتیب، در نقاط A'، B' و C' قطع می‌کنند. خطوطی که از A' به موازات BB' و CC' رسم می‌شوند اضلاع AC و AB را به ترتیب، در P و Q قطع می‌کنند و خطوطی که از A' به موازات AC و AB رسم می‌شوند، خطوط BB' و CC' را به ترتیب، در R و S قطع می‌کنند. نشان دهید که چهار نقطهٔ P، Q، R و S همخط‌اند.

۲) $ABCD$ یک لوزی است و P، Q، R، و S به‌ترتیب، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای BCD، CDA، DAB و ABC هستند. ثابت کنید که وسط پاره‌خطهای AP، BQ ، CR، و DS رأسهای یک لوزی متشابه با لوزی $ABCD$ هستند.

۳) مثلث ABC را، که دایرهٔ محیطی آن به مرکز O مفروض است، طوری رسم کنید که داشته باشیم

$$(\text{مساحت} OBC) : (\text{مساحت} OCA) : (\text{مساحت} OAB) = p : q : r$$

که p، q، و r طولهای سه‌پاره‌خط مفروض هستند.

۴) اگر p، q، و r طولهای سه پاره‌خط مفروض باشند، دو نقطهٔ D و E را روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC طوری تعیین کنید که $AD : DE : EC = p : q : r$.

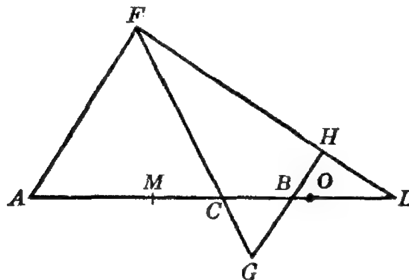
۳

ویژگیهای مثلث

الف. مقدمات

۵۴. مسئله. پاره‌خط مفروض ABرا به‌طور داخلی و خارجی به نسبت $p : q$تقسیم کنید.

از دو انتهای پاره‌خط مفروض، یعنی A و B، دو خط موازی دلخواه AF و GBH را رسم می‌کنیم (شکل ۳۹) و روی این دو خط به ترتیب، AF را برابر p ، و BG و BH را برابر q جدا می‌کنیم. خطوط FG و FH خط AB را در نقاط مطلوب C و D قطع می‌کنند؛ درستی این مطلب را به آسانی می‌توان با توجه به دو مثلث متشابه CAF و CBG، و همچنین دو مثلث متشابه DAF و DBH دریافت.



شکل۳۹

۵۵. ملاحظهٔ ۱. در بیان مسئله برای جلوگیری از بروز ابهام باید قید شود که پاره‌خطهای متناسب با p و q به ترتیب، آن‌طور که در شکل نشان داده شده است، مجاور A و B هستند، یا مجاور B و A. در غیر این‌صورت یک جفت نقطهٔ دیگر، C' و D'، نیز که نسبت به نقطهٔ M، یعنی وسط پاره‌خط AB، به ترتیب، متقارن نقاط C و D هستند، جواب به‌شمار می‌آیند. ولی درکاربردهای واقعی معمولاً طبیعت مسئله تمایزی بین نقاط A و B قائل می‌شود، و در نتیجه، تنها یک‌جفت از نقاط تقسیم جواب مطلوب خواهد بود.

۵۶. ملاحظهٔ ۲. اگر $p > q$، داریم $AC > CB$ و $AD > DB$؛ پس نقطهٔ M، وسط AB، خارج پاره‌خط CD قرار می‌گیرد. برای حالت $p < q$ نیز همین مواضع نسبی نقاط M، C، و D حفظ می‌شود.

اگر $p = q$، نقطهٔ C روی M قرار می‌گیرد و نقطهٔ تقسیم خارجی وجود ندارد، زیرا در این حالت، FH با AB موازی می‌شود.

۵۷. قضیه. اگر نقاط C و D پاره‌خط AB را به ترتیب، به‌طور داخلی و خارجی به نسبت $p:q$ تقسیم کنند، نقاط B و A پاره‌خط DC را به ترتیب، به‌طور داخلی و خارجی به نسبت $(p+q):(p-q)$ تقسیم می‌کنند.

داریم (شکل ۳۹)

$$AC:CB=p:q \ , \ AD:DB=p:q$$

پس،

$$(AC+CB):CB=(p+q):q \ , \ (AD-DB):DB=(p-q):q \qquad (۱)$$

$$AC:(AC+CB)=p:(p+q) \ , \ AD:(AD-DB)=p:(p-q) \qquad (۲)$$

با گذاشتن AB به جای $AC+CB$ و $AD-DB$ در رابطه‌های (۱) و (۲) و ترکیب دو تناسب بیان شده در هر کدام از این دو رابطه، به دست می‌آوریم

$$DB:BC=(p+q):(p-q)$$

$$DA:AC=(p+q):(p-q)$$

۵۸. نتیجه. اگر $AB=a$ و $CD=b$، داریم $b=2apq:(p^2-q^2)$.

در واقع، داریم

$$AD:AB=p:(p-q), \ \ AC:AB=p:(p+q), \ \ CD=AD-AC$$

و نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید.

۵۹. تعریف. گاهی به جای اینکه بگوییم نقاط C و D (§۵۷) پاره‌خط AB را به‌طور داخلی و خارجی به یک نسبت تقسیم کرده‌اند، می‌گوییم نقاط C و D پاره‌خط AB را به طور همساز (یا توافقی) تقسیم کرده‌اند، یا نقاط C و D نسبت به نقاط A و B مزدوج همساز یکدیگرند.

قضیهٔ قبل (§۵۷) می‌گوید که رابطهٔ این دو جفت نقطه دو طرفه است، یعنی نقاط A و B هم به نوبهٔ خود، پاره‌خط CD را به‌طور همساز تقسیم می‌کنند، و نقاط A و B، نقاط C و D را به‌طور همساز از هم جدا می‌کنند. بنابراین، می‌توانیم دو جفت نقطهٔ A، B و C، D را دو جفت نقطهٔ همساز، و دو پاره‌خط AB و CD را دو پاره‌خط همساز بنامیم.

۶۰. مسئله. سه نقطهٔ همخط A، B و C مفروض‌اند؛ مزدوج همساز C (نقطهٔ D) نسبت به دو نقطهٔ A و B را تعیین کنید.

از دو نقطهٔ A و B دو خط موازی دلخواه AF و GBH را رسم می‌کنیم (شکل ۳۹) و از نقطهٔ C قاطع دلخواهی رسم می‌کنیم تا AF و BG را به ترتیب، در F و G قطع کند. روی GB پاره‌خط BH را برابر BG جدا می‌کنیم. خط FH خط AB را در نقطهٔ مطلوب D قطع می‌کند.

۶۱. قضیه. پای عمودهایی که از دو جفت نقطهٔ همساز بر یک خط مفروض رسم می‌شوند نیز دو جفت نقطهٔ همساز هستند.

در واقع چهار خط عمودی که بر خط مفروض رسم می‌شوند با هم موازی‌اند؛ بنابراین نسبت پاره‌خطهایی که پای این عمودها روی خط مفروض جدا می‌کنند، همان نسبت بین پاره‌خطهای متناظری است که دو جفت

نقطهٔ همساز مفروض تعیین می‌کنند.

۶۲. قضیه. اگر نقاط C و D پاره‌خط AB را به‌طور همساز به نسبت $p:q$ تقسیم کنند، نقطهٔ O، وسط پاره‌خط CD، پاره‌خط AB را به‌طور خارجی به نسبت $p^۲ : q^۲$ تقسیم می‌کند.

نقطهٔ O خارج پاره‌خط AB قرار دارد (§۵۶). به دست می‌آوریم

$$AO = \frac{۱}{۲}CD + AC \ \ , \ \ BO = \frac{۱}{۲}CD - BC$$

با گذاشتن مقادیر CD، AC و BC (بندهای ۵۷ و ۵۸) به دست می‌آوریم

$$AO = ap^۲ : (p^۲ - q^۲) \ \ , \ \ BO = aq^۲ : (p^۲ - q^۲)$$

و رابطهٔ بیان شده حاصل می‌شود.

۶۳. نتیجه. داریم (§۵۸)

$$OA \cdot OB = OC^۲$$

۶۴. ملاحظهٔ ۱. اگر M و O به ترتیب، نقاط وسط پاره‌خطهای AB و CD باشند، داریم

$$MO = AO - AM = AO - \frac{۱}{۲}AB$$

پس،

$$MO = a(p^۲ + q^۲) : ۲(p^۲ - q^۲)$$

۶۵. ملاحظهٔ ۲. نقطهٔ M خارج پاره‌خط CD قرار دارد (§۵۶).

۶۶. قضیه. مجموع مربعهای دو پاره‌خط همساز با چهار برابر مربع فاصلهٔ بین نقاط وسط این پاره‌خطها برابر است.

داریم (§۵۸)

$$AB^۲ + CD^۲ = a^۲ + ۴a^۲p^۲q^۲ : (p^۲ - q^۲)^۲ = a^۲(p^۲ + q^۲)^۲ : (p^۲ - q^۲)^۲$$

پس (§۶۴)،

$$AB^۲ + CD^۲ = ۴MO^۲$$

۶۷. مسئله. دو پاره‌خط را با مفروض بودن حاصل‌ضربشان ($t^۲$) و مجموع یا تفاضلشان (a) رسم کنید.

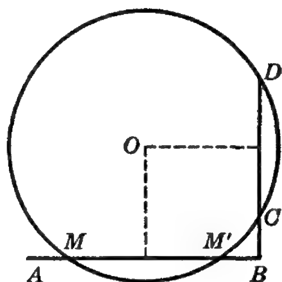
حل. دو پاره‌خط u و v را که t واسطهٔ هندسی آنها باشد رسم می‌کنیم. روی عمودی که در یک انتهای پاره‌خط $AB = a$، مثلاً B رسم کرده‌ایم، پاره‌خطهای $BC = u$ و $BD = v$ را در یک طرف AB (شکل ۴۰ الف)، یا در دو طرف مختلف AB (شکل ۴۰ ب)، بسته به اینکه a مجموع پاره‌خطهای مطلوب باشد یا تفاضل آنها، جدا می‌کنیم. محل برخورد عمودمنصفهای پاره‌خطهای AB و CD را O می‌نامیم. به مرکز O و به شعاع $OC = OD$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا AB را در دو نقطهٔ M و M' قطع کند. MA و MB (یا $M'A$ و $M'B$) پاره‌خطهای مطلوب هستند.

در واقع، داریم

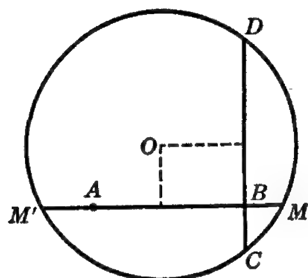
$$MA \cdot MB = BM' \cdot BM = BC \cdot BD = uv = t^۲$$

ترسیم بالا یک راه‌حل ترسیمی برای معادله‌های درجه دوم زیر است:

$$x^2 - ax + t^2 = 0 \quad , \quad x^2 - ax - t^2 = 0$$



شکل ۴۰ (الف)



شکل ۴۰ (ب)

ریشه‌های معادله‌های درجهٔ دوم

$$x^2 + ax + t^2 = 0 \quad , \quad x^2 + ax - t^2 = 0$$

تنها از نظر علامت با ریشه‌های دو معادلهٔ قبل تفاوت دارند؛ بنابراین، ریشه‌های این معادله‌ها را نیز می‌توان با این ترسیم به دست آورد. پس این ترسیم راهی برای حل ترسیمی هر معادلهٔ درجهٔ دومی است که ضریب x^2 در آن یک باشد.

تمرین

۱) دو پاره‌خط با طولهای مفروض را روی یک خط طوری قرار دهید که همساز باشند. راهنمایی. از (§۶۶) استفاده کنید.

۲) نشان دهید که نیمسازهای داخلی و خارجی هر یک از زاویه‌های مثلث، روی ضلع مقابل آن زاویه سه پاره‌خط ایجاد می‌کنند، به‌طوری که معکوس یکی با مجموع معکوسهای دو پاره‌خط دیگر برابر است. راهنمایی. از (§۵۸) استفاده کنید.

۳) نشان دهید که نیمساز داخلی (یا خارجی) هر زاویهٔ مثلث توسط پای عمودهایی که از رأسهای دو زاویهٔ دیگر مثلث بر آن رسم می‌شوند، به‌طور همساز تقسیم می‌شود.

ب. دایرهٔ محیطی

۶۸. قضیه. اگر مثلثی محاط در دایره‌ای مفروض، زاویه‌ای ثابت داشته باشد، ضلع روبروی زاویه ثابت بر دایرهٔ ثابتی هم‌مرکز با دایرهٔ مفروض مماس خواهد بود.

این قضیه را می‌توان معکوس مکان هندسی ۷ (§۱۱) دانست. اثبات را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۶۹. نتیجه. R، A، a دسته‌ای از معلومات مثلث است.

۷۰. مسئله. از مثلثی قاعده، زاویهٔ مقابل قاعده، و نسبت فاصله‌های نقطهٔ وسط قاعده از نقاط برخورد ارتفاع و نیمساز زاویهٔ مقابل به قاعده با قاعده مفروض است. مثلث را رسم کنید.

فرض کنید ABC (شکل ۴۱) مثلث مطلوب باشد. A' را وسط BC، و D و U را نقاط برخورد BC با ارتفاع AD و نیمساز AU فرض کنید. امتداد نیمساز AU و امتداد عمودمنصف BC هر دو کمان BC را، در نقطه‌ای مانند E نصف می‌کنند.

شکل۴۱

با توجه به مثلثهای متشابه ADU و $EA'U$ داریم

$$A'U : UD = A'E : AD$$

چون قاعدهٔ BC و زاویهٔ A مفروض‌اند، دایرهٔ محیطی ABC مشخص می‌شود؛ بنابراین، پاره‌خط $A'E$ معلوم است. همچنین نسبت اول در تناسب بالا معلوم است؛پس ارتفاع AD را می‌توان رسم کرد. حال به آسانی می‌توان ترسیم مطلوب را کامل کرد.

۷۱. مسئله. از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع دو ضلع جانبی، و تفاضل زاویه‌های قاعده $(B-C، b+c، R)$ مفروض است. مثلث را رسم کنید.

ABC را مثلث مطلوب فرض کنید (شکل ۴۲). فرض کنید خطی که از A به موازات BC رسم می‌شود دایرهٔ محیطی ABC را در K قطع کند. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCK$ داریم

$$\angle ABK = \angle ABC - \angle KBC = B - \angle BKA = B - \angle BCA = B - C$$

شعاع مفروض R و زاویهٔ معلوم $\angle ABK = B - C$ پاره‌خط AK را تعیین می‌کنند (§۶۹). پس در مثلث ABK قاعدهٔ AK، زاویهٔ مقابل به قاعده، یعنی $B - C$ و مجموع اضلاع جانبی، یعنی

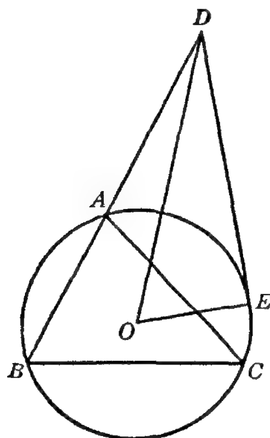
$$AB + BK = AB + AC = b + c$$

را می‌دانیم. پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم (§۱۷). خطی که از B به موازات AK رسم می‌شود، دایرهٔ محیطی ABK را در رأس سوم مثلث مطلوب ABC، یعنی C، قطع می‌کند.

شکل۴۲

۷۲. مسئله. از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، قاعده، و حاصل‌ضرب مجموع دو ضلع دیگر در یکی از آنها $[(b+c)b، a، R]$ مفروض است. مثلث را رسم کنید.

فرض کنید ABC مثلث مطلوب باشد که در دایرهٔ مفروض به مرکز O، محاط شده است (شکل ۴۳). BA را امتداد می‌دهیم و روی آن AD را برابر AC جدا می‌کنیم. حال داریم $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BAC$، و $\angle BAC$ با معلوم بودن R و a مشخص می‌شود (§۶۹). پس اگر ضلع $BC = a$ را در دایرهٔ مفروض به شعاع R قرار دهیم، یک مکان هندسی برای D خواهیم داشت (§۱۱، مکان هندسی ۷).



شکل۴۳

فرض کنید DE مماسی باشد که از D بر دایره رسم می‌شود. داریم

$$DE^{2} = DA \cdot DB = b(b+c)$$

یعنی طول مماسی را که از D بر دایرهٔ (O) رسم می‌شود می‌دانیم؛ پس یک مکان هندسی دیگر برای D داریم (§۱۱، مکان هندسی ۲)، و مثلث کمکی DBC را می‌توانیم رسم کنیم. عمودمنصف CD خط BD را در رأس سوم مثلث مطلوب ABC، یعنی A، قطع می‌کند.

تمرین

از مثلثی اجزای زیر مفروض‌اند؛ مثلث را رسم کنید.

۱) $R، A، b^{2}+c^{2}$. راهنمایی. مکان هندسی ۱۰ از بند ۱۴ را بکار ببرید.

۲) $R، A، b:c$

۳) $R، a، h_b$

۴) $R، a، b+c$

۵) $R، b، B-C$

۶) $R، m_b، C$

۷) $R، A، 2p$

۸) $R، A، a-b$

۹) $R، b+c، h_b+h_c$

۱۰) $R، b-c، h_c-h_b$

۱۱) $R، A، h_b+h_c$

۱۲) $R، a، B-C$

۱۳) $R، b، a:h_a$

۱۴) $a، A، b(b+c)$

۱۵) $R، b-c، B-C$

۷۳. قضیه. زاویهٔ بین قطری از دایرهٔ محیطی یک مثلث که از یکی از رأسهای آن مثلث می‌گذرد و ارتفاعی که از همان رأس مثلث رسم می‌شود (الف) با تفاضل دو زاویهٔ دیگر مثلث برابر است، و (ب) توسط نیمساز زاویهٔ آن رأس مثلث نصف می‌شود.

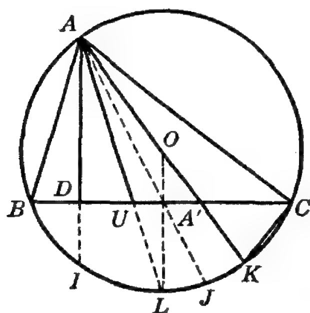
(الف) فرض کنید AD ارتفاع و AK قطری از دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند که از رأس A می‌گذرند (شکل ۴۴). زاویه‌های B و K برابرند زیرا هر دو روبروی یک کمان دایرهٔ محیطی هستند؛ پس در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABD و ACK داریم

$$\angle BAD = \angle KAC = ۹۰^\circ - B$$

و

$$\angle DAK = A - ۲(۹۰^\circ - B) = A + ۲B - ۱۸۰^\circ = A + ۲B - A - B - C = B - C$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند که در صورت منفرجه بودن یکی از زاویه‌های B یا C نیز قضیه صادق است.



شکل۴۴

(ب) AU را نیمساز زاویهٔ A فرض کنید. چون $\angle CAO = \angle BAD$، داریم $\angle DAU = \angle OAU$.

۷۴. نتیجه. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADU داریم $AD = h_a$، $AU = t_a$، و $\angle DAU = \frac{۱}{۲}(B - C)$؛ پس $B - C$، t_a، h_a یک دسته معلومات مثلث است.

۷۵. قضیه. تفاضل زاویه‌هایی که نیمساز داخلی یک زاویهٔ مثلث با ضلع مقابل به آن زاویه می‌سازد، با تفاضل زاویه‌های مجاور این ضلع برابر است.

با توجه به دو مثلث AUB و AUC (شکل ۴۴) داریم

$$\angle AUC = B + \frac{۱}{۲}A \quad \text{و} \quad \angle AUB = C + \frac{۱}{۲}A$$

پس،

$$\angle AUC - \angle AUB = B - C$$

۷۶. مسئله. از مثلثی ارتفاع، میانه و نیمساز رسم شده از یک رأس (h_a، m_a، t_a) مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که ضلع مشترک زاویهٔ قائمهٔ آنها $AD = h_a$ است (شکل ۴۴) و وترهایشان $AA' = m_a$ و $AU = t_a$ هستند، می‌توان رسم کرد. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مطلوب ABC، یعنی O، روی

عمودی که در نقطهٔ A' بر DA' رسم می‌شود، و همچنین روی خطی که با AU زاویه‌ای برابر $\angle DAU$ می‌سازد قرار دارد (۷۳§ ب)؛ پس O را می‌توان تعیین کرد. دایرهٔ (O, OA) خط DA' را در دو رأس B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

۷۷. مسئله. از مثلثی قاعده، ارتفاع وارد بر قاعده و نیمساز زاویهٔ مقابل قاعده $(a، h_a، t_a)$ مفروض است. مثلث را رسم کنید.

فرض کنید ABC مثلث مطلوب باشد. فرض کنید $AD = h_a$ و $AU = t_a$. اگر F نقطهٔ متقارن B نسبت به D باشد، داریم

$$\angle FAC = \angle AFD - \angle C = B - C$$

و این زاویه را می‌توان با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ ADU تعیین کرد (۷۳§).

فرض کنید خطی که در B بر BC عمود می‌شود، AF را در G قطع کند. مثلث قائم‌الزاویهٔ GBC را می‌توان رسم کرد، زیرا BC مفروض است و $GB = ۲h_a$. پس برای رأس A دو مکان هندسی داریم: کمانی از یک دایره که پاره‌خط GC از هر نقطه روی آن کمان با زاویهٔ $۱۸۰^\circ - (B - C)$ دیده می‌شود، و عمودمنصف BG.

۷۸. مسئله. از مثلثی قاعده، میانهٔ وارد بر قاعده و تفاضل زاویه‌های مجاور قاعده $(a، m_a، B - C)$ مفروض است. مثلث را رسم کنید.

فرض کنید ABC (شکل ۴۴) مثلث مطلوب باشد. داریم $\angle A'OK = \angle DAO = B - C$؛ پس، $\angle AOA' = ۱۸۰^\circ - (B - C)$.

فرض کنید امتداد AA' دایرهٔ محیطی را در J قطع کند. در این‌صورت، داریم

$$A'A \cdot A'J = A'B \cdot A'C$$

پس، $A'J = a^۲ : ۴m_a$. پس پاره‌خط $A'J$ را می‌توان به‌عنوان جزءِ سوم متناسب با پاره‌خطهای a و $۴m_a$ رسم کرد، و مرکز دایرهٔ محیطی O روی عمودمنصف AJ قرار دارد. پس ترسیم به صورت زیر انجام می‌شود.

$AA' = m_a$ را رسم می‌کنیم و سپس کمانی از یک دایره را رسم می‌کنیم که AA' از نقاط روی آن کمان با زاویهٔ $۱۸۰^\circ - (B - C)$ دیده شود. AA' را به اندازهٔ $A'J = a^۲ : ۴m_a$ امتداد می‌دهیم. عمودمنصف AJ کمان را در مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مطلوب قطع می‌کند. دایرهٔ (O, OA) عمودی را که در A' بر OA' رسم می‌شود در دو رأس B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

اگر نقاط A و O در دو طرف BC قرار داشته باشند، یا به عبارت دیگر اگر A زاویه‌ای منفرجه باشد، زاویه‌ای که پاره‌خط AA' از نقطهٔ O با آن زاویه دیده می‌شود برابر با $B - C$ خواهد بود.

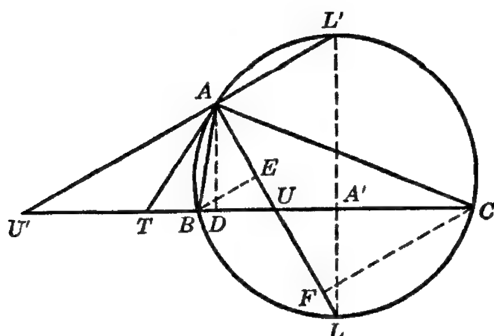
تمرین

از مثلثی اجزای زیر مفروض‌اند؛ آن‌را رسم کنید.

۱) $R، h_a، B - C$
۲) $R، t_a، B - C$
۳) $A، h_a، t_a$
۴) $a، A، h_a : t_a$
۵) $R، h_a، t_a$
۶) $R، m_a، B - C$

۷۹. قضیه. نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویهٔ مثلث از دو انتهای قطری از دایرهٔ محیطی مثلث که بر ضلع مقابل آن زاویه عمود است می‌گذرند.

نیمساز داخلی زاویهٔ A، یعنی AU، از نقطهٔ L وسط کمان BLC از دایرهٔ محیطی که شامل نقطهٔ A نیست می‌گذرد (شکل ۴۵). قطر LL' که از L می‌گذرد بر BC عمود است، و خط AL' که از L' و A می‌گذرد بر AL عمود است، زیرا زاویهٔ $L'AL$ قائمه است. پس AL' نیمساز خارجی زاویهٔ A است و اثبات قضیه کامل می‌شود.



شکل۴۵

۸۰. **قضیه.** زاویه‌ای که نیمساز خارجی هر زاویهٔ مثلث با ضلع مقابل آن زاویه می‌سازد برابر است با نصف تفاضل دو زاویهٔ مجاور به این ضلع.

دو ضلع زاویه‌ای که نیمساز خارجی AU' (شکل ۴۵) با قاعدهٔ BC می‌سازد، به ترتیب، بر نیمساز داخلی AU و ارتفاع AD عمودند؛ بنابراین، اثبات قضیه کامل می‌شود (§۷۳).

۸۱. **نتیجهٔ ۱.** اگر مماس بر دایرهٔ محیطی در نقطهٔ A، BC را در T قطع کند، داریم $TA = TU = TU'$.

در واقع، داریم (شکل ۴۵)

$$\angle TAU = \angle TAB + \angle BAU \;\;,\;\; \angle TUA = \angle UCA + \angle UAC$$

اما $\angle TAB = \angle UCA$، و $\angle BAU = \angle UAC$؛ پس مثلث TAU متساوی‌الساقین است، و $TA = TU$.

دایرهٔ (T, TA) از نقطهٔ U می‌گذرد، زیرا $TA = TU$ و چون UAU' یک زاویهٔ قائمه است، این دایره از U' هم می‌گذرد، پس $TA = TU'$.

۸۲. **نتیجهٔ ۲.** ارتفاع AD از مثلث ABC ارتفاع مثلث UAU' نیز هست؛ پس،

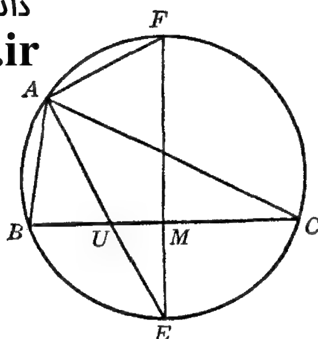
$$t_a, t'_a, h_a, B - C$$

یک دسته معلومات مثلث است، یعنی در صورتی که دو جزء از این اجزا مفروض باشد، می‌توان دوتای دیگر را تعیین کرد.

۸۳. **مسئله.** از نقطهٔ E، وسط کمان BEC از یک دایره، قاطعی رسم کنید که وتر BC را در U و دایره را در نقطه‌ای دیگر مانند A قطع کند، به‌طوری که AU طول مفروض t را داشته باشد.

فرض کنید قطر EMF (شکل ۴۶) که از نقطهٔ E می‌گذرد، کمان BC را در M قطع کند. با توجه به دو مثلث قائم‌الزاویهٔ EUM و EFA، که در زاویهٔ E مشترک‌اند، و در نتیجه زاویه‌هایشان دوبه‌دو برابرند، داریم

$$EF : EU = EA : EM$$



شکل۴۶

حال اگر قرار دهیم

$$EF = ۲R\ ,\ EM = m\ ,\ EU = x\ ,\ EA = x + t$$

تناسب به شکل زیر درمی‌آید:

$$۲R \cdot m = x(x + t)$$

و پاره‌خط x را می‌توان رسم کرد (§۶۷).

طول معلوم پاره‌خط EU نقطهٔ U، و در نتیجه قاطع مطلوب EUA را مشخص می‌کند.

۸۴. مسئلهٔ پاپوس. از نقطهٔ مفروضی روی نیمساز یک زاویهٔ مفروض، قاطعی رسم کنید، به طوری که پاره‌خط جدا شده توسط دو ضلع زاویه بر روی آن طول مفروضی داشته باشد.

فرض کنید B و C (شکل ۴۶) محل برخورد قاطع مطلوب $UBC = a$ با ضلعهای زاویهٔ مفروض BAC باشند؛ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC معلوم است (§۶۹)، و AU نیمساز زاویهٔ A از نقطهٔ E وسط کمان BEC از دایرهٔ محیطی که متناظر با وتر $BC = a$ است می‌گذرد. بنابراین، ترسیم مطلوب را می‌توان به صورت زیر انجام داد.

روی یک خط دلخواه $B'C'$ را برابر طول مفروض a جدا می‌کنیم و مکان هندسی نقطه‌ای را که $B'C'$ از آن نقطه با زاویه‌ای برابر زاویهٔ مفروض A دیده می‌شود، رسم می‌کنیم (§۱۱، مکان هندسی ۷). از E'، وسط کمان دیگر این دایره، قاطع $E'U'A'$ را رسم می‌کنیم تا $B'C'$ را در U' و دایره را در نقطه‌ای دیگر مانند A' قطع کند و طول $U'A'$ برابر باشد با طول پاره‌خط مفروض AU، که نیمساز زاویهٔ مفروض A است (§۸۳).

خطی که از U، واقع بر نیمساز زاویهٔ مفروض، می‌گذرد و با AU زاویه‌ای برابر زاویهٔ $B'U'A'$ می‌سازد، جواب مسئله است.

مسئله دو جواب دارد.

تمرین

از مثلثی اجزای زیر مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

۱) $b : c، t_a، h_a$ راهنمایی. از §۵۷ استفاده کنید.

۲) $b : c، B - C، t_a$

۳) $b : c، B - C، h_a$

۴) $b : c، t'_a، h_a$

۵) $b : c، B - C، t'_a$

۶) $t_a، c، b$

۷) $b : c، m_b، t_a$

۸) نشان دهید که اگر خطی که رأس یک مثلث را به مرکز دایرهٔ محیطی آن وصل می‌کند، با ضلع مقابل موازی باشد، طول نیمساز داخلی زاویهٔ متناظر با این رأس برابر است با طول نیمساز خارجی این زاویه، و برعکس.

۹) مثلثی را با مفروض بودن قاعده و یک زاویهٔ مجاور قاعده رسم کنید به‌طوری که طول نیمسازهای داخلی و خارجی آن زاویه با هم برابر باشند.

۱۰) (الف) اگر دو نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC برابر باشند، و دایره‌ای به قطر BC دو ضلع AB و AC را به ترتیب، در نقاط P و Q قطع کند، نشان دهید که $CP = CQ$. (ب) مثلثی را با مفروض بودن یک ضلع و پای ارتفاع وارد بر این ضلع رسم کنید به‌طوری که دو نیمساز یکی از زاویه‌های مجاور این ضلع برابر باشند.

۸۵. قضیه. حاصل‌ضرب دو ضلع هر مثلث با حاصل‌ضرب ارتفاع وارد بر ضلع سوم در شعاع دایرهٔ محیطی مثلث برابر است.

$\angle ABD = \angle AKC$ (شکل ۴۴)؛ پس با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابه، داریم

$$AB : AK = AD : AC$$

یا

$$AB \cdot AC = AK \cdot AD$$

یعنی

$$bc = ۲R \cdot h_a$$

۸۶. نتیجه. مساحت مثلث با حاصل‌ضرب سه ضلع آن تقسیم بر دو برابر قطر دایرهٔ محیطی آن برابر است.

در واقع، دو طرف تساوی پیشین (§۸۵) را در a ضرب، و ملاحظه کنید که $ah_a = ۲S$، که S مساحت مثلث است. به این ترتیب، به دست می‌آوریم

$$abc = ۴RS$$

تمرین

۱) مثلثی را با مفروض بودن a، A و bc رسم کنید.

۲) مثلثی را با مفروض بودن h_a، t_a و bc رسم کنید.

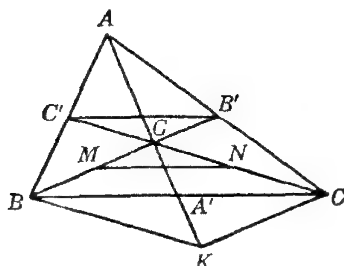
۳) از نقطهٔ ثابت A روی یک دایرهٔ مفروض دو وتر متغیر AB و AC رسم شده‌اند، به‌طوری که حاصل‌ضربشان ثابت است. نشان دهید که وتر BC بر دایرهٔ ثابتی مماس است.

۴) نشان دهید که حاصل‌ضرب فاصله‌های هر نقطه روی دایرهٔ محیطی یک مثلث تا اضلاع آن مثلث با حاصل‌ضرب فاصله‌های آن نقطه تا اضلاع مثلث مماسی آن مثلث (یعنی مثلثی که از مماسهای رسم شده بر دایرهٔ محیطی مثلث در رأسهای آن مثلث حاصل می‌شود) برابر است.

ج. میانه‌ها

۸۷. قضیه. (الف) پاره‌خطی که وسط دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم موازی و نصف آن‌است. (ب) خطی که از وسط یک ضلع مثلث به موازات ضلع دیگری رسم می‌شود، از وسط ضلع سوم می‌گذرد.

۸۸. قضیه. سه میانهٔ مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی هر یک از میانه‌ها را به دو بخش تقسیم می‌کند، که یکی یک سوم طول میانه و دیگری دو سوم طول میانه است.



شکل۴۷

فرض کنید G نقطهٔ برخورد دو میانهٔ BB' و CC' باشد (شکل ۴۷).

با توجه به دو مثلث متشابه GBC و $GB'C'$ داریم

$$BG : B'G = CG : C'G = BC : B'C' = ۲ : ۱$$

بنابر این، هر دو میانه طوری یکدیگر را قطع می‌کنند که دو بخش ایجاد شده روی هر کدام دارای نسبت بیان شده باشند، و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۸۹. تعریف. نقطهٔ G را مرکز ثقل مثلث ABC می‌نامند.

۹۰. مسئله. میانه‌های مثلثی مفروض‌اند (m_a, m_b, m_c)؛ مثلث را رسم کنید.

$C'B'$ (شکل ۴۸) را ادامه دهید و $B'K$ را برابر $B'C'$ جدا کنید. قطرهای چهارضلعی $AKCC'$ یکدیگر را نصف می‌کنند؛ پس $AKCC'$ یک متوازی‌الاضلاع است و $AK = CC' = m_c$.

چهارضلعی $A'BB'K$ نیز یک متوازی‌الاضلاع است، زیرا $A'B$ موازی و مساوی $B'K$ است؛ پس،

$$A'K = BB' = m_b$$

پس مثلث $AA'K$ را می‌توان رسم کرد زیرا اضلاع آن برابر میانه‌های مفروض است.

برای رسیدن به مثلث مطلوب ملاحظه کنید که AA' توسط $C'B'K$ در نقطهٔ L نصف شده است؛ بنابراین، KL یک میانهٔ $AA'K$، و بنابراین، طول آن معلوم است. به‌علاوه،

$$C'L = LB' = \frac{۱}{۳}KL$$

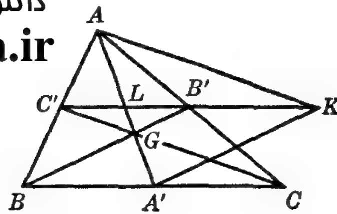
پس نقاط B' و C' را می‌توان مشخص و مثلث ABC را به‌آسانی تکمیل کرد. مسئله یک جواب دارد.

۹۱. قضیه. با میانه‌های یک مثلث، مثلث جدیدی رسم می‌کنیم. میانه‌های مثلث جدید سه چهارم اضلاع متناظر مثلث اولی هستند.

دیدیم که $(\S۹۰)$ $C'L = \frac{۱}{۳}KL$ (شکل ۴۸)؛ پس،

$$KL = \frac{۳}{۴}KC' = \frac{۳}{۴}BC = \frac{۳}{۴}a$$

و چون KL می‌تواند هر یک از میانه‌های مثلث $AA'K$ باشد، قضیه ثابت شده است.



شکل۴۸

۹۲. نتیجه. مثلث ۱ مفروض است؛ مثلث ۲ را طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن برابر میانه‌های مثلث ۱ باشند؛ به همین صورت مثلث ۳ را با میانه‌های مثلث ۲ رسم می‌کنیم و $\cdots$. مثلثهای مرتبهٔ فرد، ۱، ۳، ۵، $\cdots$، متشابه‌اند و مثلثهای مرتبهٔ زوج، ۲، ۴، ۶، $\cdots$، نیز متشابه‌اند. در هر دسته اضلاع هر مثلث برابر $\frac{۳}{۴}$ اضلاع مثلث قبلی است.

۹۳. قضیه. مساحت مثلثی که طول اضلاعش با طول میانه‌های مثلث مفروضی برابر باشد، سه چهارم مساحت آن مثلث مفروض است.

مساحت مثلث $AA'K$ (شکل ۴۸) برابر است با مجموع مساحتهای مثلثهای AKL و $A'KL$؛ KL قاعدهٔ مشترک این دو مثلث است و ارتفاع هر کدام نصف ارتفاع وارد بر BC در مثلث ABC است؛ پس،

$$\text{مساحت}AA'K : \text{مساحت}ABC = KL : BC = \frac{۳}{۴} \qquad (\S۹۱)$$

۹۴. قضیه. در یک دایرهٔ مفروض می‌توان تعدادی نامتناهی مثلث محاط کرد، به طوری که مرکز ثقل همهٔ آنها نقطهٔ مفروضی درون دایره باشد.

نقطهٔ دلخواه A را روی دایرهٔ مفروض (O) برگزینید و آن‌را به مرکز ثقل مفروض G وصل کنید. روی امتداد AG پاره‌خط $G'A$ را برابر $\frac{۱}{۲}GA$ جدا کنید و A' را به O، مرکز دایرهٔ(O) وصل کنید. خطی که در A' بر OA' عمود می‌شود دایرهٔ محیطی (O) را در دو رأس دیگر مثلث ABC قطع می‌کند.

در صورتی که A' درون دایرهٔ (O) قرار گیرد، A یک جواب مسئله است. مکان هندسی A' دایرهٔ (N) است که متجانس دایرهٔ (O)، در تجانس $(G, -\frac{۱}{۲})$ است. پس اگر (N) کاملاً درون (O) قرار گیرد، هر نقطه‌ای از (O) یک جواب به دست می‌دهد. در غیر این‌صورت (O) کمانی خواهد داشت که نقاط روی آن‌را نمی‌توان به عنوان نقطهٔ A برگزید.

۹۵. مسئله. از مثلثی ارتفاع و میانهٔ رسم شده از یک رأس، و زاویهٔ آن رأس (h_a, m_a, A) مفروض است. مثلث را رسم کنید.

A' و B' را نقاط میانی اضلاع BC و AC از مثلث مطلوب ABC و AD را ارتفاع آن فرض کنید. مثلث قائم‌الزاویهٔ ADA' را می‌توان رسم کرد. میانهٔ AA' از نقطهٔ B' با زاویهٔ معلوم $۱۸۰^\circ - A$ دیده می‌شود و بنابراین، یک مکان هندسی برای B' داریم. از طرف دیگر، B' روی خطی قرار دارد که وسطهای AA' و AD را به هم وصل می‌کند. به این ترتیب نقطهٔ B' مشخص می‌شود و مثلث ABC را به آسانی می‌توان تکمیل کرد.

تمرین

۱) نشان دهید خطی که از وسط یک میانه به یک رأس مثلث رسم می‌شود، ضلع مقابل به آن رأس را به نسبت یک سوم به دو سوم قطع می‌کند.

۲) مثلثی را رسم کنید که محل دو رأس و محل مرکز ثقل آن مفروض است.
۳) مثلثی رسم کنید که میانه‌های آن روی سه خط همرس مفروض قرار گیرند. نشان دهید که یکی از رأسها را می‌توان به دلخواه روی یکی از خطوط مفروض برگزید.
۴) نشان دهید خطی که از مرکز ثقل مثلث به موازات یکی از اضلاع رسم می‌شود، مساحت مثلث را به دو بخش به نسبت چهار به پنج تقسیم می‌کند.
۵) نشان دهید خطوطی که وسط اضلاع یک مثلث را به هم وصل می‌کنند، آن مثلث را به چهار مثلث همنهشت تقسیم می‌کنند.
۶) نشان دهید خطوطی که مرکز ثقل مثلث را به رأسهای آن وصل می‌کنند، مثلث را به سه مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند و مرکز ثقل تنها نقطه‌ای است که این خاصیت را دارد.
۷) نشان دهید که (الف) بین دو ضلع مثلث، آن ضلع بزرگتر است که میانهٔ وارد بر آن کوچکتر باشد؛ (ب) اگر دو میانهٔ یک مثلث برابر باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است؛ (ج) اگر دو میانهٔ یک مثلث با اضلاعی که به آنها وارد می‌شوند متناسب باشند، مثلث متساوی‌الساقین است.
۸) نشان دهید که فاصله‌های یک نقطهٔ واقع بر یک میانهٔ مثلث از دو ضلع دربرگیرندهٔ میانه، با طول این اضلاع نسبت عکس دارد.
۹) خطی از مرکز ثقل یک مثلث می‌گذرد. نشان دهید که مجموع فاصله‌های این خط از دو رأس که در یک طرف خط قرار دارند، با فاصلهٔ این خط از رأس سوم برابر است.
۱۰) نشان دهید که مجموع (جبری) فاصله‌های رأسهای یک مثلث از هر خط همصفحه با آن مثلث، برابر است با مجموع فاصله‌های وسط اضلاع مثلث از این خط.
۱۱) نشان دهید که مجموع میانه‌های یک مثلث از محیط مثلث کوچکتر و از سه چهارم محیط مثلث بزرگتر است.

مثلثی را که اجزای زیر از آن معلوم است، رسم کنید:

۱۲) m_a، c، b
۱۳) b، m_c، m_b
۱۴) m_c، m_b، a
۱۵) h_a، m_c، m_b راهنمایی. فاصلهٔ G از BC برابر $\frac{1}{3}h_a$ است.

۹۶. تعریف. مثلثی که رئوس آن نقاط وسط اضلاع یک مثلث مفروض باشند، مثلث میانک یا مثلث مکمل آن مثلث نامیده می‌شود.

۹۷. قضیه. مرکز ثقل هر مثلث و مرکز ثقل مثلث میانک آن مثلث بر هم منطبق‌اند.

میانهٔ AA' از مثلث ABC پاره‌خط $B'C'$ را نصف می‌کند (شکل ۴۸)؛ پس AA' میانهٔ مثلث $A'B'C'$ نیز هست. همین مطلب در مورد بقیهٔ میانه‌ها نیز صادق است.

۹۸. نتیجه. مثلث مکمل $A'B'C'$ متناظر مثلث مفروض ABC در تجانس $(G, -1:2)$ است.

در این تجانس، نقطهٔ P' که متناظر بانقطهٔ مفروض P است، نقطهٔ مکمل P نامیده می‌شود.

۹۹. تعریف. اگر از هر رأس یک مثلث خطی موازی با ضلع مقابل آن رسم کنیم مثلثی تشکیل می‌شود؛ این مثلث را مثلث پادمکمل مثلث مفروض می‌نامیم.

۱۰۰. قضیه. مرکز ثقل هر مثلث و مرکز ثقل مثلث پادمکمل آن بر هم منطبق‌اند.

در واقع اگر مثلث $A'B'C'$ (شکل ۴۸) را مثلث مفروض در نظر بگیریم، مثلث ABC پادمکمل $A'B'C'$ خواهد بود و با استفاده از قضیهٔ ۹۷، این قضیه ثابت می‌شود.

۱۰۱. نتیجه. مثلث $A''B''C''$ که پادمکمل مثلث ABC است، در تجانس $(G, ۱:-۲)$ با مثلث ABC متناظر است.

در این تجانس نقطهٔ P'' متجانس با نقطهٔ مفروض P، نقطهٔ پادمکمل P نامیده می‌شود.

۱۰۲. مسئله. از مثلثی یک زاویه و میانه‌های وارد بر اضلاع این زاویه $(A ، m_b ، m_c)$ مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

با رسم $BB' = m_b$ یک مکان هندسی برای رأس A داریم(§۱۱، مکان هندسی ۷). با توجه به این مکان و با استفاده از تجانس $(B', -۱)$، یک مکان نیز برای رأس C به دست می‌آوریم. حال با مشخص کردن مرکز ثقل G بر روی BB'، دایرهٔ $(G, \frac{۱}{۳}(۲m_c))$ مکان هندسی دیگری را برای C به دست می‌دهد.

۱۰۳. مسئله. از مثلثی قاعده، نسبت میانه‌های وارد بر دو ضلع جانبی و تفاضل مربعهای این دو ضلع $(a ، m_b : m_c ، b^۲ - c^۲)$ مفروض است. مثلث را رسم کنید.

پس از رسم $BC = a$، داریم (شکل ۴۷)

$$BG : CG = \frac{۱}{۳}(۲m_b) : \frac{۱}{۳}(۲m_c) = m_b : m_c$$

پس G روی دایرهٔ معلومی قرار دارد (§۱۱، مکان هندسی ۱۱). حال با استفاده از تجانس $(A', ۱:۳)$ و مکان هندسی G، یک مکان هندسی برای رأس A به دست می‌آوریم. شرط $b^۲ - c^۲$ مکان هندسی دیگری را برای رأس A به دست می‌دهد (§۱۱، مکان هندسی ۱۲).

۱۰۴. مسئله. زاویهٔ قائمهٔ ACB حول نقطهٔ C که رأس این زاویه است دوران می‌کند و دو ضلع این زاویه دو خط ثابت عمود بر هم OAX و OBY را در A و B قطع می‌کنند. مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ABC را بیابید.

خط AB قطر دایرهٔ $OACB$ است؛ پس نقطهٔ وسط AB، یعنی M، روی d، عمودمنصف وتر OC (که پاره‌خط ثابتی است) قرار دارد. پس مکان هندسی M خط d است و مکان هندسی G، مرکز ثقل مثلث ABC، خط متناظر با خط d، در تجانس $(C, ۲:۳)$ است.

۱۰۵. تعریف. دو نقطهٔ واقع بر یک ضلع مثلث را نقاط همنوا می‌نامیم، اگر از وسط این ضلع همفاصله باشند.

خطوطی که از دو نقطهٔ همنوا به رأس مقابل ضلع شامل این نقاط رسم می‌شوند، خطوط همنوا نامیده می‌شوند.

تمرین

از مثلثی اجزای زیر مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

۱) $m_b ، m_c ، h_b$
۲) $b ، c ، m_b$
۳) $a ، A ، m_b$
۴) $a ، h_a ، m_c : m_b$
۵) اگر L مزدوج همساز مرکز ثقل G از مثلث ABC نسبت به A و A'، یعنی دو نقطهٔ انتهای میانهٔ AA'، باشند، نشان دهید که $LA' = A'A$.
۶) از مثلثی محل مرکز ثقل، محل یک رأس و راستای دو ضلعی که از این رأس می‌گذرند، مفروض است. این مثلث را رسم کنید.
۷) مکان هندسی مرکز ثقل مثلث متغیری را بیابید که قاعده و دایرهٔ محیطی آن ثابت است.
۸) مثلث مکمل و مثلث پادمکمل مثلث مفروضی متجانس‌اند. مرکز و نسبت این تجانس را بیابید.

۹) رأسهای یک چهارضلعی را سه به سه برمی‌گزینیم و هر بار مرکز ثقل مثلثی را که این سه رأس مشخص می‌سازند تعیین می‌کنیم. چهار مرکز ثقل به دست آمده، رأسهای یک چهار ضلعی متجانس با چهار ضلعی مفروض هستند. مرکز و نسبت این تجانس را بیابید.

۱۰) تصویر نقطهٔ P بر اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC را به ترتیب، A'، B'، و C' می‌نامیم. A''، B'' و C'' به ترتیب نقاط وسط پاره‌خطهای $B'C'$، $C'A'$ و $A'B'$ هستند. از A''، B'' و C'' عمودهایی بر اضلاع BC، CA و AB از مثلث ABC رسم می‌کنیم. نشان دهید که این عمودها همرس‌اند. راهنمایی. دو دسته خط عمود موجود در این مسئله، خطوط متناظر یکدیگر در شکلهای متجانس $A'B'C'$ و $A''B''C''$ هستند.

۱۱) اگر K و K' دو نقطهٔ همنوا از ضلع BC در مثلث ABC باشند، و خط AK ضلع $B'C'$ از مثلث مکمل را در K'' قطع کند، نشان دهید که خط $K'K''$ از G، مرکز ثقل مثلث ABC، می‌گذرد و $K'G : GK'' = ۲ : ۱$. راهنمایی. مثلث AKK' را در نظر بگیرید.

۱۲) L، L' و M، M' را دو جفت نقطهٔ همنوا روی دو ضلع AC و AB از مثلث ABC در نظر بگیرید. L'' و M'' نقاط برخورد خطوط BL و CM با اضلاع $A'C'$ و $A'B'$ از $A'B'C'$، مثلث مکمل مثلث ABC، هستند. نشان دهید که مثلثهای $AL'M'$ و $A'L''M''$ دارای تجانس معکوس هستند. در شکل حاصل دیگر مثلثهای متجانس را نیز بیابید.

۱۳) از مثلثی یک زاویه، مجموع دو ضلع تشکیل دهندهٔ این زاویه و میانهٔ وارد بر یکی از ضلعها $(m_c, b+c, A)$ مفروض است مثلث را رسم کنید.

۱۰۶. قضیه. دو برابر مربع هر میانهٔ مثلث، برابر است با مجموع مربعهای دو ضلع در بردارندهٔ این میانه، منهای نصف مربع ضلع سوم.

اثبات این قضیه در یافتن مکان هندسی ۱۰، ۱۱§ بیان شد.

بنابراین، با نمادهایی که معمولاً به کار می‌بریم،

$$۲m_a^۲ = b^۲ + c^۲ - \frac{۱}{۲}a^۲\ ,\ ۲m_b^۲ = c^۲ + a^۲ - \frac{۱}{۲}b^۲$$

$$۲m_c^۲ = a^۲ + b^۲ - \frac{۱}{۲}c^۲$$

۱۰۷. قضیه. مجموع مربعهای میانه‌های مثلث برابر است با سه چهارم مجموع مربعهای اضلاع مثلث (۱۰۶§).

۱۰۸. نتیجه. مجموع مربعهای فاصله‌های مرکز ثقل مثلث از رأسهای مثلث برابر است با یک سوم مجموع مربعهای اضلاع.

۱۰۹. قضیه. اگر M نقطهٔ دلخواهی در صفحهٔ مثلث ABC، بامرکز ثقل G، باشد داریم

$$MA^۲ + MB^۲ + MC^۲ = GA^۲ + GB^۲ + GC^۲ + ۳MG^۲$$

اگر D وسط پاره‌خط AG باشد، با اعمال فرمول میانه‌ها (۱۰۶§) به مثلثهای MBC، MDA' و MAG داریم

$$MB^۲ + MC^۲ = ۲MA'^۲ + \frac{۱}{۲}BC^۲$$

$$MD^۲ + MA'^۲ = ۲MG^۲ + \frac{۱}{۲}DA'^۲$$

$$MA^۲ + MG^۲ = ۲MD^۲ + \frac{۱}{۲}AG^۲$$

و $DA' = AG$؛ پس با ضرب تساوی دوم در ۲ و جمع کردن تساویها، پس از ساده کردن، خواهیم داشت

$$MA^{2} + MB^{2} + MC^{2} - 3MG^{2} = \frac{1}{2}BC^{2} + \frac{3}{2}AG^{2}$$

اکنون با در نظر گرفتن میانه‌های BB' و CC' می‌توانیم دو رابطهٔ دیگر مشابه با رابطهٔ بالا به دست آوریم، و با جمع کردن سه رابطه به دست می‌آوریم

$$3(MA^{2} + MB^{2} + MC^{2} - 3MG^{2}) = \frac{1}{2}(BC^{2} + CA^{2} + AB^{2}) + \frac{3}{2}(GA^{2} + GB^{2} + GC^{2})$$

با ملاحظهٔ اینکه (§۱۰۸)

$$BC^{2} + CA^{2} + AB^{2} = 3(GA^{2} + GB^{2} + GC^{2})$$

به آسانی به نتیجهٔ بیان شده خواهیم رسید.

۱۱۰. نتیجه. اگر نقطهٔ M (قضیهٔ ۱۰۹) بر O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، منطبق باشد، داریم

$$3R^{2} = GA^{2} + GB^{2} + GC^{2} + 3OG^{2}$$

یا

$$OG^{2} = R^{2} - \frac{1}{9}(a^{2} + b^{2} + c^{2})$$

تمرین

۱) نشان دهید اگر دو نقطه از مرکز ثقل یک مثلث همفاصله باشند، مجموع مربع فاصله‌هایشان از رأسهای مثلث برابرند، و برعکس.

۲) مثلثی را که a، m_a و $b+c$ از آن مفروض است، رسم کنید.

۳) نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که مجموع مربع فاصله‌هایش از دو رأس مثلث مفروضی برابر است با مربع فاصله‌اش از رأس سوم آن مثلث. مکان هندسی این نقطه را بیابید.

۴) وتر متغیری از یک دایرهٔ ثابت از نقطهٔ ثابتی با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. ثابت کنید که مکان هندسی نقطهٔ وسط این وتر یک دایره است.

۵) اگر a، b، و c اضلاع و S مساحت مثلث مفروضی باشند، نشان دهید مساحت مثلثی که سه رأس آن پای عمودهایی است که از مرکز ثقل مثلث مفروض بر سه ضلع آن مثلث رسم می‌شود، عبارت است از

$$4S^{3}(a^{2} + b^{2} + c^{2})/9a^{2}b^{2}c^{2}$$

۶) از مثلثی نسبتهای $a:b$ و $b:c$ و مجموع میانه‌ها مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

۷) اگر $A''B''C''$ مثلث پادمکمل مثلث ABC، و A' وسط BC باشد، نشان دهید که

$$A'B''^{2} - A'C''^{2} = 2(AB^{2} - AC^{2})$$

د. دایره‌های سه مماس

I ـ نیمسازها

۱۱۱. قضیه. اندازهٔ زاویهٔ متشکل از دو نیمساز داخلی (خارجی) مثلث برابر 90° به اضافهٔ (منهای) نصف زاویهٔ سوم مثلث است.

اگر I محل برخورد نیمسازهای داخلی BI و CI از مثلث ABC باشد، داریم

$$\angle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = 90^\circ + \frac{1}{2}A$$

اثبات برای نیمسازهای خارجی به همین ترتیب صورت می‌گیرد.

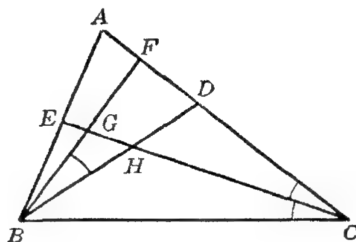
۱۱۲. قضیه. پای عمودی که از یک رأس مثلث بر نیمساز رأس دیگری از آن رسم می‌شود، روی ضلعی از مثلث میانک (مکمل) قرار دارد که روبروی آن رأس مثلث واقع است.

اگر P پای عمودی باشد که از رأس A بر نیمساز زاویهٔ B رسم شده است، و Q محل برخورد AP و ضلع BC باشد، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BPA و BPQ همنهشت‌اند و نقطهٔ P وسط پاره‌خط AQ است؛ و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۱۱۳. نتیجه. پای چهار عمودی که از یک رأس مثلث بر چهار نیمساز داخلی و خارجی دو رأس دیگر رسم می‌شوند، همخط‌اند.

۱۱۴. قضیه. بین دو زاویهٔ مثلث زاویه‌ای که نیمساز داخلی کوتاهتری دارد بزرگتر است.

در مثلث ABC فرض کنید زاویهٔ B بزرگتر از زاویهٔ C باشد (شکل ۴۹)، و BD و CE به‌ترتیب نیمسازهای داخلی این دو زاویه باشند. روی پاره‌خط AD نقطهٔ F را طوری برمی‌گزینیم که $\angle FBD = \angle ACE = \angle ECB$. فرض کنید H و G به ترتیب، محل برخورد خطوط BD و BF با نیمساز CE باشند.



شکل۴۹

دو مثلث FBD و FGC متشابه‌اند زیرا زاویه‌هایشان دوبه‌دو با هم برابرند؛ پس،

$$BF : CF = BD : CG \qquad \text{(الف)}$$

ولی در مثلث BFC زاویهٔ C کوچکتر از زاویهٔ B است؛ پس $BF < CF$ و بنابر (الف)، $BD < CG < CE$، که قضیه را ثابت می‌کند.

۱۱۵. نتیجه. اگر دو نیمساز داخلی یک مثلث برابر باشند،آن مثلث متساوی‌الساقین است.

نکته. این قضیه برای دو نیمساز خارجی برقرار نیست.

تمرین

۱) رأس مثلث متغیری ثابت است و ضلع مقابل این رأس، که طول آن متغیر است، روی خط راست ثابتی قرار دارد. نشان دهید که مکان هندسی تصویر رأس ثابت این مثلث متغیر روی هر یک از نیمسازهای دو زاویهٔ دیگر یک خط راست است.

۲) نشان دهید که پای عمودهایی که از دو رأس یک مثلث بر نیمساز داخلی (یا خارجی) رأس سوم رسم می‌شود، و وسط ضلع مقابل رأس سوم، رأسهای یک مثلث متساوی‌الساقین هستند و دو ضلع مساوی این مثلث به ترتیب، با اضلاع گذرنده از رأس سوم مثلث مفروض موازی‌اند.

۳) نشان دهید که اگر خط واصل بین پای دو نیمساز داخلی یک مثلث با ضلع سوم مثلث موازی باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

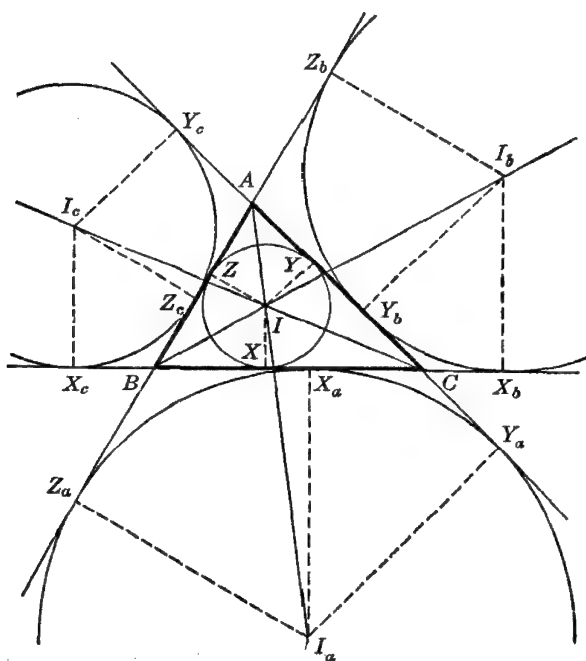
۴) نشان دهید که مجموع معکوسهای سه نیمساز داخلی هر مثلث از مجموع معکوسهای سه ضلع آن مثلث بزرگتر است (یعنی نشان دهید که $\frac{1}{t_a}+\frac{1}{t_b}+\frac{1}{t_c}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$).

II ـ مراکز دایره‌های سه مماس

۱۱۶. قضیه. سه نیمساز داخلی زاویه‌های هر مثلث همدیگر را در یک نقطه، که مرکز داخلی مثلث است، قطع می‌کنند.

۱۱۷. قضیه. نیمسازهای خارجی هر دو زاویهٔ مثلث، یکدیگر را روی نیمساز داخلی زاویهٔ سوم آن مثلث قطع می‌کنند.

۱۱۸. تعریف. نقطهٔ I_a از نیمساز داخلی AII_a (شکل ۵۰) در مثلث ABC، که محل برخورد این نیمساز با دو نیمساز خارجی زاویه‌های B و C است، مرکز خارجی مثلث نسبت به رأس A، یا به اختصار مرکز خارجی A، نامیده می‌شود.



شکل ۵۰

نقطهٔ I_a از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و بنابراین، مرکز دایرهٔ (I_a) است، که بر سه ضلع مثلث ABC مماس است. محل تماس این دایره با دو ضلع AB و AC روی امتداد این اضلاع و محل تماس آن با ضلع BC داخل پاره‌خط BC است. به همین دلیل دایرهٔ (I_a) و مرکزش I_a، راگاهی نسبت به ضلع BC، یا رأس A، یا زاویهٔ A، بیان می‌کنند.

دو نقطهٔ I_b و I_c و دو دایرهٔ (I_b) و (I_c) به‌ترتیب، مشابه نقطهٔ I_a و دایرهٔ (I_a) نسبت به زاویه‌های B و C، یا نسبت به اضلاع CA و AB هستند (شکل ۵۰).

دایرهٔ محاطی داخلی یا دایرهٔ داخلی (I) و سه دایرهٔ محاطی خارجی یا دایره‌های خارجی (I_a)، (I_b)،

و (I_c) را گاهی چهار دایرهٔ سه مماس مثلث ABC و مراکزشان را مراکز سه مماس مثلث می‌نامند.

۱۱۹. نتایج. با توجه به دو قضیهٔ قبل (۱۱۶§ و ۱۱۷§) داریم

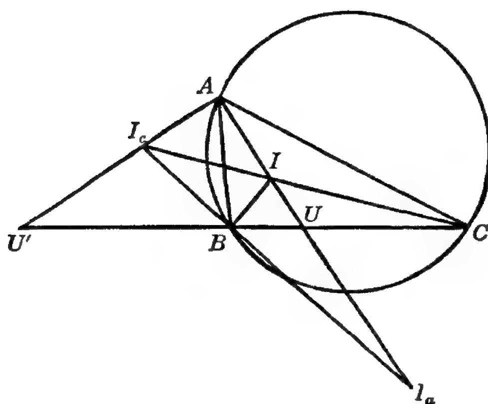
نتیجهٔ ۱. چهار مرکز سه مماس هر مثلث روی شش خط، یعنی نیمسازهای زاویه‌های مثلث، قرار دارند. هر مرکز سه مماس روی سه خط واقع است، و روی هر خط دو مرکز سه مماس قرار دارد.

نتیجهٔ ۲. اگر شش نقطهٔ وسط کمانهایی را که اضلاع مثلثی مفروض روی دایرهٔ محیطی آن مثلث جدا می‌کنند داشته باشیم، می‌توانیم مراکز سه مماس را تنها با استفاده از خطکش تعیین کنیم.

۱۲۰. قضیه. دو مرکز سه مماسی که روی یک نیمساز قرار دارند، آن نیمساز را به طور همساز تقسیم می‌کنند.

فرض کنید U نقطهٔ برخورد AII_a و BC باشد (شکل ۵۱). I و I_a به ترتیب، نقاط برخورد BI و BI_a، نیمسازهای زاویهٔ B، با قاعدهٔ AU از مثلث BAU هستند، و قاعدهٔ AU را به‌طور همساز تقسیم می‌کنند.

برای هر دو مرکز سه مماس دیگر نیز وضعیت مشابهی وجود دارد.



شکل۵۱

۱۲۱. قضیه. در مثلث، هر مرکز سه‌مماس واقع بر یک نیمساز داخلی (خارجی) این نیمساز را به نسبت مجموع (تفاضل) دو ضلع تشکیل دهندهٔ زاویهٔ در نظر گرفته شده به ضلع مقابل آن زاویه تقسیم می‌کند.

اگر U و U' به ترتیب، نقطهٔ برخورد AI و AI_c با BC باشند (شکل ۵۱)، در مثلث ABC داریم

$$BU : CU = c : b, \qquad BU' : CU' = c : b$$

$$BU : (BU + CU) = c : (b + c), \qquad BU' : (CU' - BU') = c : (b - c)$$

$$BU : a = c : (b + c), \qquad BU' : a = c : (b - c)$$

ولی در مثلثهای ABU و ABU' داریم

$$AI : IU = c : BU, \qquad AI_c : U'I_c = c : BU'$$

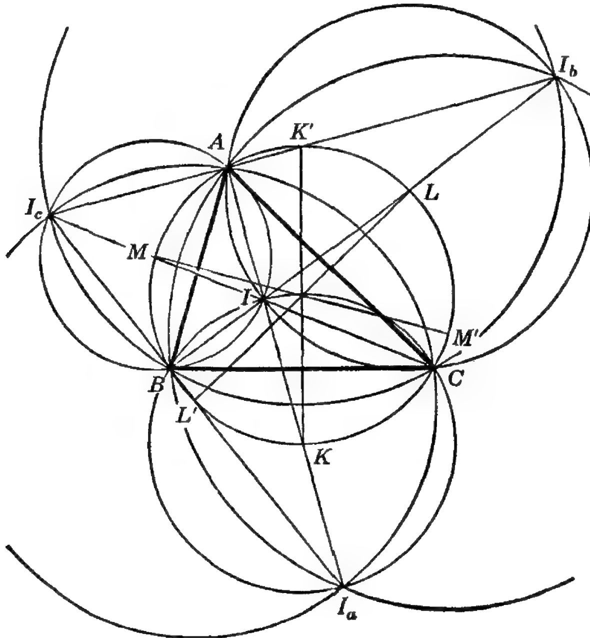
یا اگر به جای BU و BU' مقادیر به دست آمده در بالا را بگذاریم به دست خواهیم آورد

$$AI : IU = (b + c) : a, \qquad AI_c : I_cU' = (b - c) : a$$

برای نیمسازهای دیگر نیز وضعیت مشابهی وجود دارد.

۱۲۲. قضیه. هر دو مرکز سه مماس یک مثلث، دو انتهای قطری از یک دایره هستند؛ این دایره از آن دو رأس مثلث که با مراکز سه مماس در نظر گرفته شده همخط نیستند می‌گذرد.

(الف) مرکز داخلی I و مرکز خارجی I_a را در نظر بگیرید. دو نیمساز BI و BI_a، و همچنین دو نیمساز CI و CI_a (شکل ۵۲) بر هم عمودند؛ پس اثبات قضیه تمام است.



شکل۵۲

به‌علاوه، مرکز این دایره در نقطهٔ برخورد عمودمنصف BC و II_a قرار دارد، و این دوخط هر دو از K، وسط آن کمان BC از دایرهٔ محیطی ABC که حاوی رأس A نیست می‌گذرند؛ پس مرکز دایرهٔ (II_a) بر K منطبق است.

(ب) دو مرکز خارجی I_b و I_c را در نظر بگیرید. نیمسازهای BI_b و BI_c، همچنین نیمسازهای CI_b و CI_c بر هم عمودند؛ پس اثبات قضیه تمام است.

به‌علاوه می‌توان به همان روشی که در قسمت (الف) بیان شد نشان داد که مرکز دایرهٔ (I_bI_c)، یعنی نقطهٔ K'، وسط آن کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC است که رأس A روی آن قرار ندارد.

نقاط K و K' (§۱۲۱) دو انتهای قطری از دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC هستند که بر ضلع BC عمود است. قطرهای LL' و MM' از دایرهٔ (O) که بر اضلاع AC و AB عمودند، وضعیتی مشابه قطر KK' دارند؛ پس اثبات قضیه تمام است.

۱۲۳. قضیه. چهار مرکز سه مماس هر مثلث روی شش دایره قرار دارند. هر کدام از این دایره‌ها از دو رأس مثلث می‌گذرد و مرکزش وسط یکی از کمانهای دایرهٔ محیطی است که آن دو رأس دو انتهای آن هستند(شکل ۵۲).

۱۲۴. نتیجه. اگر وسط شش کمانی که اضلاع مثلث مفروضی روی دایرهٔ محیطی آن مثلث جدا می‌کنند مفروض باشند، می‌توان مراکز سه مماس را تنها با پرگار تعیین کرد.

۱۲۵. قضیه. اگر مثلث متغیری قاعده و دایرهٔمحیطی ثابتی داشته باشد، مراکز سه مماس مثلث دو دایره را می‌پیمایند. این دو دایره از دو رأس ثابت مثلث می‌گذرند و مراکزشان دو سر قطری از دایرهٔ محیطی هستند که بر ضلع ثابت عمود است.

اگر دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC و ضلع BC مفروض باشند، دایره‌های (II_a) و (I_bI_c) (§۱۲۲) بدون توجه به محل رأس A تعیین می‌شود؛ پس اثبات قضیه تمام است.

۱۲۶. قضیه. نقاط وسط شش پاره‌خط تعیین شده توسط چهار مرکز سه مماس هر مثلث، روی یک دایره قرار دارند که دایرهٔ محیطی مثلث است (شکل ۵۲).

۱۲۷. قضیه. حاصل‌ضرب فاصله‌های دو مرکز سه مماس هر مثلث از رأس همخط با آنها برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلعی از مثلث که از آن رأس می‌گذرند.

اگر ضلع AB دایرهٔ (II_a) را در B' نیز قطع کند، داریم

$$AI \cdot AI_a = AB \cdot AB'$$

چون خطوط AB و AC با قطر AII_a زاویهٔ یکسان می‌سازند، دو وتر برابر ایجاد می‌کنند؛ و در نتیجه، $AB' = AC$؛ پس،

$$AI \cdot AI_a = AB \cdot AC$$

برای هر دو مرکز سه مماس دیگر نیز مطلب مشابهی صادق است.

۱۲۸. ملاحظه. دو مرکز سه مماس واقع بر نیمساز داخلی یک‌زاویه از مثلث، در یک طرف رأس این زاویه قرار دارند ، ولی برای دو رأس واقع بر یک نیمساز خارجی عکس این مطلب صادق است.

۱۲۹. مسئله. از مثلثی قاعده، نیمساز داخلی زاویهٔ مقابل قاعده و مجموع دو ضلع جانبی $(a, t_a, b+c=s)$ مفروض است. مثلث را رسم کنید.

دو پاره‌خط s و a مفروض‌اند، پس نسبت $a : s$ معلوم است. پاره‌خط مفروض $AU = t_a$ را به‌طور داخلی و خارجی به‌نسبت معلوم $a : s$ تقسیم کنید تا نقاط I و I_a به دست آید (§۱۲۱)؛ در دایرهٔ (II_a) که II_a قطر آن‌است وتر BC را به طول مفروض a رسم کنید، به‌طوری که از نقطهٔ U بگذرد (§۱۱، مکان هندسی ۸)؛ ABC مثلث مطلوب است. مسئله دو جواب دارد.

۱۳۰. مسئله. از مثلثی محل سه نقطهٔ برخورد امتداد نیمسازهای داخلی با دایرهٔ محیطی مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

سه نقطهٔ مفروض K، L، و M (شکل ۵۲) دایرهٔ محیطی (O) از مثلث مطلوب ABC را تعیین می‌کنند و نقاط وسط کمانهایی هستند که اضلاع مثلث ABC روی دایرهٔ (O) ایجاد می‌کنند.

نقاط L و M مراکز دو دایره‌ای هستند که از نقطهٔ A و مرکز داخلی I از مثلث ABC می‌گذرند (§۱۲۲)؛ پس AIK بر LM عمود است، یعنی A دومین نقطهٔ برخورد دایرهٔ (O) با خطی است که از نقطهٔ مفروض K بر خط معلوم LM عمود می‌شود. خطوطی که از L و M به ترتیب بر MK و KL عمود می‌شوند دو رأس دیگر B و C از مثلث مطلوب ABC را روی دایرهٔ (O) تعیین می‌کنند.

تمرین

۱) نشان دهید که نیمساز خارجی هر زاویهٔ مثلث با خط واصل بین دو نقطهٔ برخورد دایرهٔ محیطی با نیمسازهای خارجی (داخلی) دو زاویهٔ دیگر مثلث، موازی است.

۲) ازمثلثی نقاط برخورد نیمسازهای خارجی زاویه‌های مثلث با دایرهٔ محیطی مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

از مثلثی محل نقاط زیر مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

۳) I_a، I_b، I_c　　۴) I، I_b، I_c　　۵) O، I، I_a

۶) از مثلثی قاعده، نیمساز خارجی زاویهٔ مقابل به قاعده و تفاضل دو ضلع دیگر $(a, t'_a, b-c)$ مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۷) از مثلثی دو ضلع و فاصلهٔ رأس مشترک این دو ضلع از مرکز داخلی مثلث (b, c, AI) مفروض است. مثلث را رسم کنید.

III ـ شعاعهای سه مماس

۱۳۱. نمادگذاری. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی یا به اختصار، شعاع داخلی مثلث را با r و شعاع دایره‌های محاطی خارجی، یابه اختصار، شعاعهای خارجی نسبت به رأسهای A، B ، و C از مثلث ABC را به ترتیب با r_a، r_b، و r_c نشان می‌دهیم، مگر اینکه خلاف آن‌را ذکر کنیم.

این چهار شعاع را شعاعهای سه‌مماس مثلث ABC می‌نامیم.

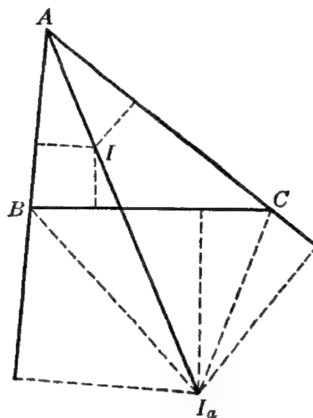
۱۳۲. قضیه. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث برابر است با مساحت مثلث تقسیم بر نصف محیط مثلث.

اگر S مساحت مثلث ABC باشد، داریم (شکل ۵۳)

$$S = ABI\text{مساحت} + BCI\text{مساحت} + CAI\text{مساحت}$$

$$= \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb = \frac{1}{2}r(a+b+c) = pr$$

۱۳۳. قضیه. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مثلث برابر است با مساحت مثلث تقسیم بر تفاضل نصف محیط و ضلعی از مثلث که دایرهٔ محاطی خارجی بر آن مماس است.



شکل۵۳

داریم (شکل ۵۳)

$$S = ABI_a\text{مساحت} + ACI_a\text{مساحت} - BCI_a\text{مساحت}$$

$$= \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{1}{2}r_a(b+c-a) = r_a(p-a)$$

۱۳۴. نتیجهٔ ۱. حاصل‌ضرب چهار شعاع سه مماس مثلث با مربع مساحت آن مثلث برابر است.

$$rr_ar_br_c = S^4 : p(p-a)(p-b)(p-c) = S^4 : S^2 = S^2$$

۱۳۵. نتیجهٔ ۲. معکوس شعاع داخلی برابر است با مجموع معکوس شعاعهای سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

۱۳۶. قضیه. معکوس شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث برابر است با مجموع معکوس ارتفاعهای مثلث.

داریم

$$2S = 2pr = ah_a = bh_b = ch_c$$

$$2p : \frac{1}{r} = a : \frac{1}{h_a} = b : \frac{1}{h_b} = c : \frac{1}{h_c}$$

$$= (a+b+c) : (\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c})$$

و چون $2p = a+b+c$ قضیه اثبات می‌شود.

۱۳۷. نتیجه. مجموع معکوسهای شعاعهای خارجی مثلث برابر است بامجموع معکوسهای ارتفاعهای مثلث.

۱۳۸. قضیه. اگر روی یک خط دلخواه پاره‌خطهای $DP = r$ و $DQ = r_a$ را طوری جدا کنیم که D بین P و Q باشد، و A، مزدوج همساز D نسبت به P و Q را رسم کنیم (§۶۰)، در صورتی که r شعاع داخلی و r_a یکی از شعاعهای خارجی مثلث ABC باشد، پاره‌خط AD برابر است با h_a، ارتفاع وارد بر ضلعی از مثلث که r_a شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع است.

شکل۵۴

P و Q پای عمودهایی هستند که از نقاط I و I_a بر ارتفاع AD از مثلث ABC رسم شده‌اند (شکل ۵۴)، و پاره‌خط AD را به طور همساز تقسیم می‌کنند (§۶۱) و $DP = r$ ، $DQ = r_a$ ؛ پس اثبات قضیه

تمام است.

۱۳۹. نتیجهٔ ۱. در هر یک از دسته‌های زیر اگر دو پاره‌خط مفروض باشند، می‌توان پاره‌خط سوم آن دسته را رسم کرد.

$$r, r_a, h_a; \quad r, r_b, h_b; \quad r, r_c, h_c$$

زیرا در صورتی که سه نقطه از چهار نقطهٔ همساز A، P، D، و Q مفروض باشند، نقطهٔ چهارم را می‌توان تعیین کرد (§۶۰).

۱۴۰. نتیجهٔ ۲. واضح است که نقطهٔ D پاره‌خط QP را به‌طور داخلی به نسبت $QD : DP = r_a : r$ تقسیم می‌کند؛ پس (§۵۸)،

$$\begin{aligned} h_a &= ۲(r_a + r) r_a r : (r_a^۲ - r^۲) \\ &= ۲ r r_a : (r_a - r) \end{aligned}$$

برای h_b و h_c نیز رابطه‌های مشابهی وجود دارد.

روش دیگر. داریم (§۱۳۲، §۱۳۳)

$$۲S = a h_a = ۲pr \,,\ ۲S = a h_a = ۲(p-a) r_a$$

پس،

$$a(h_a - r) = (b+c) r \,,\ a(h_a + r_a) = (b+c) r_a$$

یا

$$(h_a - r) : (h_a + r_a) = r : r_a$$

این رابطه هم برای h_a همان مقداری را به دست می‌دهد که در بالا به دست آوردیم.

نکته. نقاط P و Q ارتفاع AD را به طور داخلی و خارجی به نسبت زیر تقسیم می‌کنند (§۵۷):

$$(r_a - r) : (r_a + r)$$

۱۴۱. قضیه. اگر روی خط دلخواهی پاره‌خطهای $DR = r_b$ و $DS = r_c$ را طوری جدا کنیم که R و S، در یک طرف D باشند، و A مزدوج همساز D نسبت به R و S را رسم کنیم (§۶۰)، در صورتی‌که r_b و r_c دو شعاع خارجی مثلث ABC باشند، پاره‌خط AD برابر است با ارتفاع وارد بر ضلع بین دو رأسی که شعاعهای خارجی را نسبت به آنها در نظر گرفته‌ایم.

اگر R و S به ترتیب، پای عمودهایی باشند که از نقاط I_b و I_c بر AD رسم شده‌اند (شکل ۵۴)، R و S پاره‌خط AD را به طور همساز تقسیم می‌کنند (§۶۱)، و $DR = r_b$، $DS = r_c$؛ پس اثبات قضیه تمام است.

۱۴۲. نتیجهٔ ۱. در هر یک از دسته‌های زیر اگر دو پاره‌خط مفروض باشند، می‌توان پاره‌خط سوم آن دسته را رسم کرد:

$$h_a, r_b, r_c; \quad h_b, r_c, r_a; \quad h_c, r_a, r_b$$

زیرا در صورتی که سه نقطه از چهار نقطهٔ همساز D، S، A، و R مفروض باشند، می‌توانیم نقطهٔ چهارم را تعیین کنیم.

۱۴۳. نتیجهٔ ۲. D پاره‌خط $RS = r_b - r_c$ را به‌طور خارجی به نسبت $RD : DS = r_b : r_c$ تقسیم می‌کند. پس (§۵۸)،

$$h_a = ۲(r_b - r_c)r_b r_c : (r_b^۲ - r_c^۲)$$
$$= ۲r_b r_c : (r_b + r_c)$$

دو رابطهٔ مشابه هم برای h_b و h_c وجود دارد.

روش دیگر. داریم (§۱۳۳)

$$۲S = ah_a = (a + c - b)r_b,\ ۲S = ah_a = (a + b - c)r_c$$

پس،

$$a(h_a - r_b) = (c - b)r_b,\ a(r_c - h_a) = (c - b)r_c$$

یا

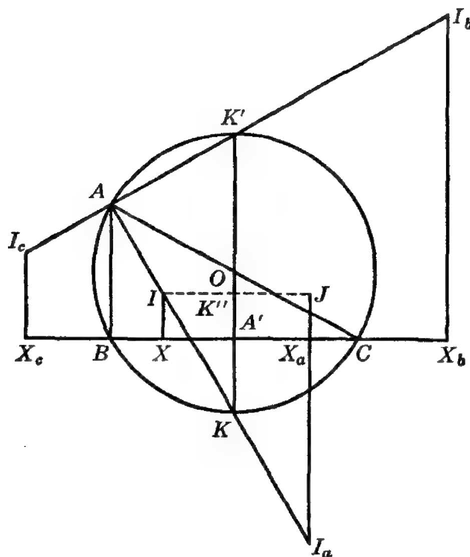
$$(h_a - r_b) : (r_c - h_a) = r_b : r_c$$

این رابطه نیز برای h_a همان مقداری را به دست می‌دهد که در بالا به دست آوردیم.

نکته. نقاط S و R ارتفاع AD را به طور داخلی و خارجی به نسبت زیر تقسیم می‌کند (§۵۷):

$$(r_b - r_c) : (r_b + r_c)$$

۱۴۴. معلومات. فرض کنید A' وسط ضلع BC باشد (شکل ۵۵) و X، X_a، X_b، و X_c پای عمودهایی باشند که از رأسهای سه مماس I، I_a، I_b، و I_c بر ضلع BC از مثلث ABC رسم می‌شوند. فرض کنید خطی که از I به موازات BC رسم می‌شود قطر KK' را در K'' و امتداد I_aX_a را در J قطع کند.



شکل۵۵

(الف) نقطهٔ K وسط ضلع II_a از مثلث IJI_a است، و در نتیجه، داریم

$$KA' + A'K'' = KK'' = \frac{۱}{۲}I_aJ = \frac{۱}{۲}(I_aX_a + X_aJ)$$

و
$$A'K'' = X_a J = r$$

پس،
$$A'K = \frac{1}{2}(r_a - r)$$

حال اگر R و a مفروض باشند، پاره‌خط $A'K$ تعیین می‌شود؛ پس

$$R, a, r_a - r$$

یک دسته معلومات مثلث است.

(ب) چون نقطهٔ K' وسط ضلع I_bI_c از ذوزنقهٔ $I_bI_cX_cX_b$ است، داریم

$$A'K' = \frac{1}{2}(I_bX_b + I_cX_c) = \frac{1}{2}(r_b + r_c)$$

پس دسته معلومات زیر را داریم:

$$R, a, r_b + r_c$$

با در نظر گرفتن اضلاع CA و AB از مثلث و قطرهایی از دایرهٔ محیطی که بر این اضلاع عمودند، نتایج مشابهی را به دست می‌آوریم.

۱۴۵. نتیجه. مجموع شعاعهای خارجی مثلث برابر است با مجموع شعاع داخلی و چهار برابر شعاع دایرهٔ محیطی.

در واقع، داریم $KK' = KA' + A'K'$.

۱۴۶. قضیهٔ کارنو. مجموع فاصله‌های مرکز دایرهٔ محیطی از سه ضلع مثلث برابر است با مجموع شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث.

داریم (شکل ۵۵)

$$OA' = OK - A'K = R - \frac{1}{2}(r_a - r)$$

و به طور مشابه،

$$OB' = R - \frac{1}{2}(r_b - r)\ ,\ OC' = R - \frac{1}{2}(r_c - r)$$

با جمع کردن این سه پاره‌خط و در نظر گرفتن نتیجهٔ ۱۴۵، نتیجهٔ بیان شده را به‌دست می‌آوریم.

نکته. در مورد مثلثی که زاویهٔ منفرجه دارد، باید فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی از ضلع مقابل زاویهٔ منفرجه را منفی در نظر گرفت.

۱۴۷. مسئله. از مثلثی یک ضلع، شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی (a, R, r) مفروض است. مثلث را رسم کنید.

در دایره‌ای به شعاع R وتر $BC = a$ را رسم کنید. اکنون زاویهٔ A مشخص می‌شود (§۶۹)، و از نقطهٔ I ضلع BC با زاویهٔ $\frac{1}{2}A + {}^\circ۹۰$ دیده می‌شود (§۱۱۱)؛ پس یک مکان هندسی برای I داریم (§۱۱، مکان هندسی ۷). خطی به موازات BC و به فاصلهٔ r از آن مکان هندسی دومی برای I است. مسئله ممکن است دو جواب داشته باشد.

۱۴۸. مسئله. مثلثی را که یک زاویهٔ قاعده، مجموع دو ضلع جانبی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی از آن $(B, b + c, r)$ مفروض‌اند رسم کنید.

BA (شکل ۵۶) را امتداد دهید و روی آن AD را برابر AC جدا کنید. مثلث BID را می‌توان رسم کرد، زیرا قاعده، $BD = b + c$، زاویهٔ $IBD = \frac{۱}{۲}B$ و ارتفاع $BD = r$ معلوم‌اند. حال،

$$\angle DCI = \angle DCA + \angle ACI = \frac{۱}{۲}A + \frac{۱}{۲}C = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}B$$

پس C روی دایره‌ای که DI یک وتر آن‌است قرار دارد (§۱۱، مکان هندسی ۷). از نقطهٔ B علاوه بر BD مماس دیگری نیز می‌توان بر دایرهٔ (I, r) رسم کرد؛ این مماس دایره را در رأس C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند. رأس سوم A از مثلث ABC نقطهٔ برخورد BD و مماس دومی است که از C بر دایرهٔ محاطی (I, r) رسم می‌شود.

شکل۵۷

شکل۵۶

۱۴۹. مسئله. از مثلثی شعاع داخلی، شعاع خارجی نسبت به یک ضلع و میانهٔ وارد بر آن ضلع (r،r_a،m_a) مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

روی خط دلخواهی $DP = r$ (شکل ۵۷) و $DQ = r_a$ را در جهت مخالف DP جدا کنید. اگر A مزدوج همساز D نسبت به P و Q باشد، پاره‌خط AD ارتفاع وارد بر ضلع BC از مثلث مطلوب ABC خواهد بود (§۱۳۸).

فرض کنید دایرهٔ (A, m_a) خطی را که در D بر AD عمود است در A' قطع کند؛ در نقطهٔ A' خطی بر DA' عمود کنید و روی آن در همان طرف DA' که DQ قرار دارد پاره‌خط $A'K = \frac{۱}{۲}(r_a - r)$ (§۱۴۲ الف) را جدا کنید. عمودمنصف AK امتداد $A'K$ را در مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC قطع می‌کند. دایرهٔ (O, OA) خط DA' را در رأسهای B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

۱۵۰. مسئله. از مثلثی محل نقاط I و I_a، و طول ارتفاع h_a و نسبت $r_a : r$ مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

واضح است که نقاطی که پاره‌خط II_a را به‌طور داخلی و خارجی به نسبت مفروض تقسیم می‌کنند، رأس A و نقطهٔ برخورد ضلع BC و نیمساز AI، یعنی نقطهٔ U، هستند. مماسی که از U بر دایرهٔ (A, h_a) رسم می‌شود، دایره‌ای را که II_a قطر آن‌است در دو رأس دیگر مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند. مسئله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد، یا جواب نداشته باشد.

۱۵۱. مسئله. از مثلثی قاعده، ارتفاع وارد بر قاعده و مجموع دو ضلع دیگر $(a, h_a, b+c)$ مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

رابطهٔ (§۱۳۲)

$$ah_a = (a+b+c)r$$

r را به عنوان جزء چهارم تناسب تعیین می‌کند، و با معلوم بودن h_a و r می‌توان r_a را تعیین کرد (§۱۳۹). همچنین a و $r_a - r$ قطر دایرهٔ محیطی را تعیین می‌کنند (§۱۴۶). اکنون به آسانی می‌توان مثلث را رسم کرد، زیرا a، h_a و R را می‌دانیم.

تمرین

مثلثی را که اجزای زیر از آن مفروض‌اند رسم کنید:

۱) S، $2p$، a
۲) r_a، r، R
۳) a، R، r_a
۴) r، $B-C$، h_a
۵) r_a، $B-C$، h_a
۶) h_a، t_a، r (یا r_a)
۷) $b+c$، r، h_a
۸) $b+c$، r_a، h_a
۹) r، R، h_a
۱۰) $2p$، r، r_a
۱۱) A، r_b، r_c. راهنمایی: به کمک خطوط موازی اضلاع زاویهٔ A به آسانی می‌توان مراکز I_b و I_c را روی نیمساز خارجی A تعیین کرد.
۱۲) a, r_b, r_c
۱۳) نشان دهید در مثلث متغیری که دایرهٔ محاطی داخلی ثابتی دارد، مجموع معکوسهای سه شعاع خارجی ثابت است.

شکل۵۸

۱۵۲. قضیهٔ اویلر. فاصلهٔ d بین مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d^2 = R(R-2r)$$

که در آن R و r به ترتیب شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی هستند.

داریم (شکل ۵۸)

$$AI \cdot IK = IU \cdot IV = (R+d)(R-d)$$

و (۱۲۲§ الف)

$$IK = KC = BK$$

پس،

$$R^۲ - d^۲ = AI \cdot KC \qquad \text{(الف)}$$

از طرف دیگر دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AIZ و $KK'C$ متشابه‌اند، زیرا $\angle IAZ = \angle K'$؛ پس،

$$AI \cdot CK = IZ \cdot KK' = ۲Rr \qquad \text{(ب)}$$

و رابطهٔ بیان شده از (الف) و (ب) به دست می‌آید.

۱۵۳. قضیه. فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی از مراکز دایره‌های محاطی خارجی I_a، I_b، I_c در مثلث ABC از روابط زیر به دست می‌آید:

$$d_a^۲ = OI_a^۲ = R(R + ۲r_a)\ ,\ \ OI_b^۲ = R(R + ۲r_b)\ ,\ \ OI_c^۲ = R(R + ۲r_c)$$

اثبات شبیه اثبات قبل است (۱۵۲§).

۱۵۴. نتیجه. $II_a^۲ = ۴R(r_a - r)\ ,\ I_bI_c^۲ = ۴R(r_b + r_c)$

در واقع، بااعمال رابطهٔ میانه‌ها (۱۰۶§) به دو مثلث OII_a و OI_bI_c خواهیم داشت

$$OI^۲ + OI_a^۲ = ۲OK^۲ + \frac{۱}{۲}II_a^۲\ ,\ OI_b^۲ + OI_c^۲ = ۲OK'^۲ + \frac{۱}{۲}I_bI_c^۲$$

و با استفاده از رابطه‌های قبل (۱۵۳§) روابط بیان شده به دست می‌آیند.

برای پاره‌خطهای II_b، II_c، I_aI_b و I_aI_c نیز رابطه‌های مشابهی وجود دارد.

۱۵۵. قضیه. اگر خط‌المرکزین دو دایرهٔ مفروض (O, R) و (I, r)، که آن‌را d می‌نامیم، در رابطهٔ زیر صدق کند:

$$OI^۲ = d^۲ = R(R - ۲r)$$

تعدادی نامتناهی مثلث را می‌توان بر دایرهٔ (I, r) محیط کرد که در دایرهٔ (O, R) محاط باشند.

از نقطهٔ دلخواه A (شکل ۵۸) روی دایرهٔ (O, R) دو مماس AB و AC را بر دایرهٔ (I, r) رسم می‌کنیم. خط AI نیمساز زاویهٔ BAC است، و از رابطهٔ مفروض نتیجه می‌شود

$$AI \cdot IK = ۲Rr$$

با توجه به مثلثهای متشابه AIZ و $KK'C$ داریم

$$AI \cdot CK = ۲Rr$$

و بنابراین، $IK = KC$. پس I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است (۱۲۲§ الف)، که قضیه را اثبات می‌کند.

تمرین

۱) نشان دهید اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی برابر نصف شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۲) از مثلثی شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، شعاع دایرهٔ محیطی و تفاضل دو زاویهٔ آن $(B - C، R، r)$ مفروض است؛ مثلث را رسم کنید. راهنمایی. مثلث AIO را در نظر بگیرید.

۳) نشان دهید اگر مثلث متغیری دایرهٔ محیطی ثابت و دایرهٔ محاطی داخلی ثابت داشته باشد، مجموع شعاعهای خارجی مثلث ثابت است.

۴) رابطه‌های زیر را ثابت کنید:

(الف) $OI^۲ + OI_a^۲ + OI_b^۲ + OI_c^۲ = ۱۲R^۲$

(ب) $II_a^۲ + II_b^۲ + II_c^۲ = ۸R(۲R - r)$

(ج) $I_aI_b^۲ + I_bI_c^۲ + I_cI_a^۲ = ۸R(۴R + r)$

۵) اگر JJ' قطری از دایرهٔ محاطی داخلی باشد که بر قطری از آن دایره که از O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، می‌گذرد عمود است، نشان دهید که محیط مثلث OJJ' با قطر دایرهٔ محیطی مثلث مفروض برابر است.

IV. نقاط تماس

۱۵۶. نمادگذاری. نقاط تماس چهار دایرهٔ سه مماس (I)، (I_a)، (I_b) و (I_c) از مثلث ABC با ضلع BC را X، X_a، X_b، و X_c می‌نامیم مگر اینکه خلاف آن‌را ذکر کنیم. برای اضلاع CA و AB به ترتیب حروف Y و Z را به کار می‌بریم.

۱۵۷. قضیه. فاصلهٔ هر رأس مثلث از نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلعی که از آن رأس می‌گذرد برابر است با نصف محیط مثلث منهای طول ضلع مقابل آن رأس.

داریم (شکل ۵۹)

$$AZ = AY \ , \ BZ = BX \ , \ CX = CY$$

و

$$\begin{aligned} AZ + AY &= AB + AC - BZ - CY \\ &= AB + AC - BX - CX \\ &= AB + AC - BC = ۲p - ۲a \end{aligned}$$

پس،

$$AZ = AY = p - a$$

به طور مشابه،

$$BZ = BX = p - b \ , \ \ CX = CY = p - c$$

۱۵۸. قضیه. فاصلهٔ هر رأس مثلث از نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن رأس با ضلعی که از آن رأس می‌گذرد برابر نصف محیط مثلث است.

داریم (شکل ۵۹)

$$AZ_a = AY_a \ , \ BX_a = BZ_a \ , \ CX_a = CY_a$$

و

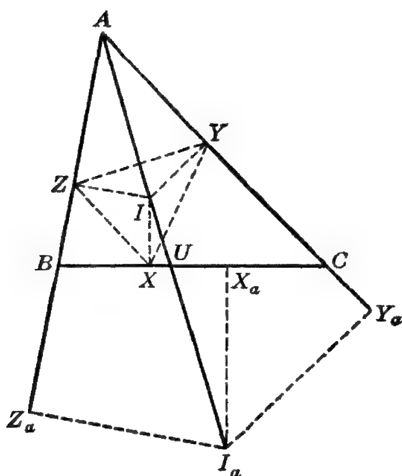
$$\begin{aligned} AZ_a + AY_a &= AB + AC + BZ_a + CY_a \\ &= AB + AC + BX_a + CX_a \\ &= AB + AC + BC = ۲p \end{aligned}$$

پس،

$$AZ_a = AY_a = p$$

به طور مشابه،

$$BX_b = BZ_b = CX_c = CY_c = p$$



شکل۵۹

۱۵۹. نتیجه. داریم (شکل ۵۹)

$$BX_a = BZ_a = AZ_a - AB = p - c$$
$$CX_a = CY_a = AY_a - AC = p - b$$

برای دو ضلع دیگر مثلث نیز وضع مشابهی داریم.

۱۶۰. قضیه. نقاط تماس هر ضلع مثلث با دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع دو نقطهٔ همنوا هستند (§۱۰۵).

در واقع، داریم (§۱۵۷، §۱۵۹)

$$BX = p - b\,,\ \ CX_a = p - b$$

۱۶۱. نتیجه. داریم

$$XX_a = BC - BX - CX_a = a - ۲(p - b) = b - c$$

به طور مشابه،

$$YY_b = a - c\,,\ \ ZZ_c = a - b$$

۱۶۲. قضیه. $ZZ_a = YY_a = a$ (شکل ۵۹).

داریم

$$ZZ_a = BZ + BZ_a = p - b + p - c = ۲p - (b + c) = a$$

برای دو ضلع دیگر مثلث نیز نتیجهٔ مشابهی صادق است.

۱۶۳. قضیه. دو نقطهٔ تماس هر ضلع مثلث با دو دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به دو ضلع دیگر دو نقطهٔ همنوا هستند. فاصلهٔ بین این دو نقطهٔ تماس با مجموع دو ضلع دیگر برابر است.

داریم (شکل ۶۰)

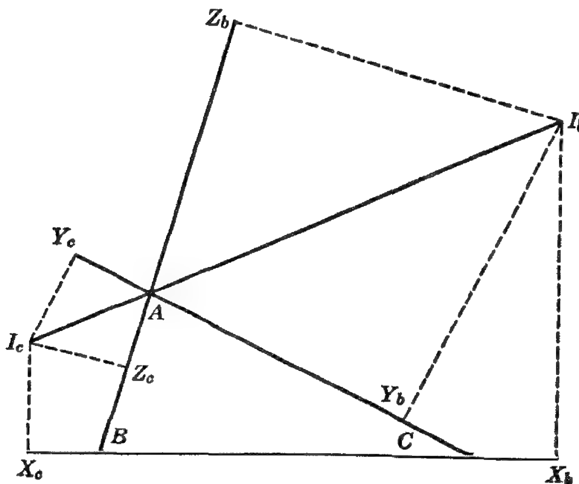
$$BX_c = CX_c - CB = p - a\ ,\ \ CX_b = BX_b - BC = p - a$$

پس نقاط X_b و X_c همنوا هستند.

$$X_bX_c = X_bC + BC + BX_c = (p-a) + a + (p-a) = b + c$$

که اثبات بخش دوم قضیه به حساب می‌آید.

برای دو ضلع دیگر مثلث ABC نیز نتیجهٔ مشابهی صادق است.



شکل ۶۰

۱۶۴. قضیه. $Y_bY_c = Z_bZ_c = a$ (شکل ۶۰).

داریم

$$Y_bY_c = CY_c - CY_b = p - CX_b = p - (p-a) = a$$

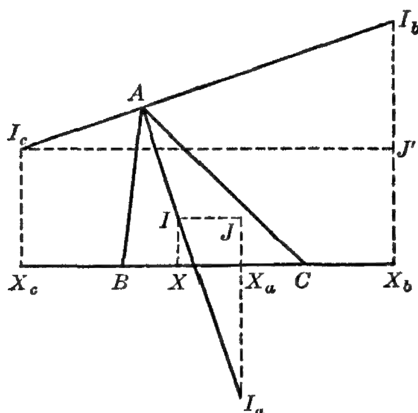
۱۶۵. پیشنهاد. شش نقطهٔ B، C، X، X_a، X_b، و X_c روی ضلع BC، $15 = \frac{5}{2} \times 6$ پاره‌خط را تعیین می‌کنند. پیشنهاد می‌کنیم خواننده این ۱۵ پاره‌خط را همراه اندازهٔ هر کدام بر حسب اضلاع مثلث بنویسد. برای پاره‌خطهای روی اضلاع دیگر مثلث ABC نیز می‌توان کار مشابهی را انجام داد.

۱۶۶. معلومات. فرض کنید خطی که از I به موازات BC رسم می‌شود، امتداد I_aX_a را در J قطع کند (شکل ۶۱). داریم (§۷۳)

$$\angle JI_aI = \angle XII_a = \frac{1}{2}(B - C)$$

پس با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ JII_a، دسته معلومات زیر را داریم:

$$b - c\ ,\ B - C\ ,\ r_a + r$$



شکل۶۱

۱۶۷. معلومات. فرض کنید خطی که از I_c به موازات BC رسم می‌شود، I_bX_b را در J' قطع کند (شکل ۶۱). داریم (§۸۰)

$$\angle I_bI_cJ' = \frac{1}{2}(B-C)$$

پس با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ I_bI_cJ'، دسته معلومات زیر را داریم:

$$b+c\,,\ B-C\,,\ r_b-r_c$$

۱۶۸. قضیه. نسبت مساحت یک مثلث به مساحت مثلثی که توسط نقاط تماس اضلاع مثلث با دایرهٔ محاطی داخلی آن تعیین می‌شود، برابر است با نسبت قطر دایرهٔ محیطی مثلث به شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن.

در دو مثلث ABC و IYZ (شکل ۵۹) زاویه‌های A و I مکمل یکدیگرند؛ پس،

$$\text{مساحت}\,IYZ : \text{مساحت}\,ABC = r^2 : bc = r^2a : abc$$

روابط مشابهی نیز برای مثلثهای IZX و IXY داریم. باجمع کردن این سه رابطه خواهیم داشت

$$\text{مساحت}\,XYZ : \text{مساحت}\,ABC = r^2(a+b+c) : abc$$

پس با توجه به §۱۳۲ و §۸۶ نتیجهٔ بیان شده به دست می‌آید.

به عنوان تمرین، قضیه‌های معادلی را برای نقاط تماس با دایره‌های محاطی خارجی بیان، و آنها را ثابت کنید.

۱۶۹. مسئله. از مثلثی محیط، یک زاویه و نیمساز داخلی آن زاویه $(t_a, A, 2p)$ مفروض است. مثلث را رسم کنید.

مثلث AI_aZ_a (شکل ۵۹) را می‌توان رسم کرد. روی AI_a پاره‌خط AU را برابر t_a جدا کنید، و دایرهٔ (I_a, I_aZ_a) را رسم کنید. خط AZ_a، مماس دومی که از A بر این دایره رسم می‌شود، و مماسی که از نقطهٔ U بر این دایره رسم می‌شود، سه ضلع مثلث مطلوب هستند.

مسئله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد، یا جواب نداشته باشد.

۱۷۰. مسئله. مثلثی را که از آن، یک زاویه، مجموع دو ضلع این زاویه و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی $(r, b+c=s, A)$ مفروض‌اند، رسم کنید.

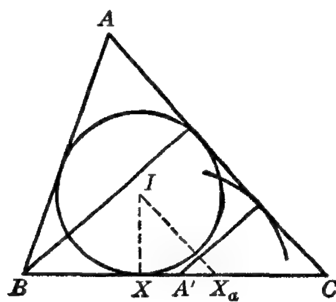
مثلث AIZ (شکل ۵۹) را می‌توان رسم کرد. پس داریم $AZ = p - a = \frac{1}{2}(b+c-a)$، و چون $b+c$ مفروض است، a را داریم و مسئله به رسم مثلثی با مفروض بودن (a, A, r) تبدیل می‌شود.

۱۷۱. مسئله. مثلثی را که تفاضل دو ضلع جانبی، یک زاویهٔ قاعده و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن $(r, B, b-c)$ مفروض‌اند، رسم کنید.

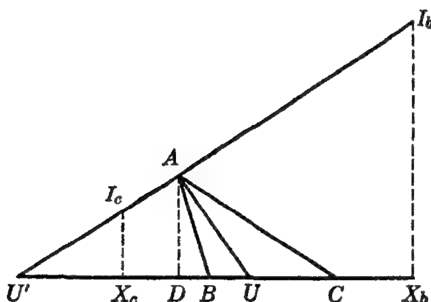
مثلث BIX (شکل ۵۹) را می‌توان رسم کرد. BX را به اندازهٔ $\frac{1}{2}(b-c)$ امتداد می‌دهیم و A'، نقطهٔ وسط BC، را به دست می‌آوریم (§۱۶۰، §۱۶۱)؛ پس رأس C تعیین می‌شود. دو مماسی که از نقاط B و C بر دایرهٔ (I, r) رسم می‌شوند، در رأس سوم مثلث مطلوب ABC همدیگر را قطع می‌کنند.

۱۷۲. مسئله. مثلثی را که تفاضل دو ضلع، ارتفاع وارد بر یکی از این اضلاع و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن $(r, h_b, b-c)$ مفروض‌اند، رسم کنید.

مثلث IXX_a (شکل ۶۲) را می‌توان رسم کرد. چون نقطهٔ A'، وسط XX_a، نقطهٔ وسط BC نیز هست، خطی که از A' بر AC عمود می‌شود برابر $\frac{1}{2}h_b$ است. دایره‌های (I, r) و $(A', \frac{1}{2}h_b)$ را رسم کنید. یک مماس مشترک خارجی این دو دایره، $XA'X_a$ را در رأس C از مثلث مطلوب قطع می‌کند، و نقطهٔ متقارن C نسبت به A' رأس B از مثلث مطلوب است؛ رأس سوم A محل برخورد مماس مشترک بیان شده در بالا و مماسی است که از B بر (I, r) رسم می‌شود.



شکل۶۲



شکل۶۳

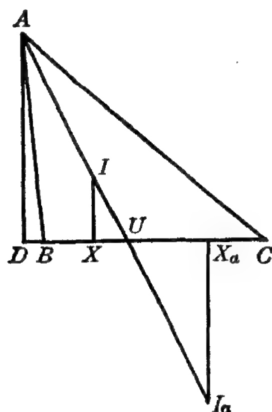
۱۷۳. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، نیمسازهای داخلی و خارجی یک زاویه، و مجموع اضلاع آن زاویه $(b+c, t'_a, t_a)$ مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۶۳) مثلث مطلوب باشد. مثلث قائم‌الزاویهٔ AUU' را می‌توان رسم کرد، و ارتفاع AD از مثلث ABC ارتفاع AUU' نیز هست. مراکز سه مماس I_b و I_c توسط نقاط A و U' به صورت همساز از هم جدا می‌شوند، پس نقاط X_b و X_c نیز توسط نقاط D و U' به‌طور همساز از هم جدا می‌شوند (§۶۱) ولی $X_bX_c = b+c$ (§۱۶۳)؛ پس نقاط X_b و X_c را می‌توان با قرار دادن پاره‌خط مفروض $b+c$ روی خط UDU'، به‌طوری که با پاره‌خط DU' مزدوج همساز باشد (§۶۶) به دست آورد.

I_b و I_c را نقاط تلاقی خط AU' با عمودهایی که در X_b و X_c بر UU' رسم می‌شوند فرض کنید. دایره‌های (I_b, I_bX_b) و (I_c, I_cX_c) را رسم کنید. مماسهای مشترک داخلی این دو دایره از نقطهٔ A می‌گذرند

و نقاط تلاقی آنها با UU' دو رأس دیگر مثلث مطلوب ABC را به دست می‌دهند.

۱۷۴. مسئله. از مثلثی محل یک رأس و محل نقاط تماس ضلع مقابل به آن رأس با دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع، مفروض است. مثلث را رسم کنید.



شکل۶۴

فرض کنید مثلث ABC (شکل ۶۴) مثلث مطلوب باشد. مراکز سه مماس I و I_a توسط نقاط A و U به صورت همساز از هم جدا می‌شوند (§۱۲۰)؛ پس D، پای عمود AD که از نقطهٔ A بر قاعدهٔ XX_a رسم می‌شود توسط نقاط X و X_a به طور همساز از نقطهٔ U جدا می‌شود، و بنابراین، نقطهٔ U را می‌توان رسم کرد (§۶۰).

فرض کنید عمودهایی که در نقاط X و X_a بر XX_a رسم می‌شوند، خط AU را در I و I_a قطع کنند. مماسهای مشترک خارجی دایره‌های (I, IX) و (I_a, I_aX_a) از نقطهٔ A می‌گذرند و محل تلاقی آنها با XX_a دو رأس دیگر مثلث مطلوب ABC را به دست می‌دهند.

تمرین

مثلثی را که اجزای زیر از آن مفروض‌اند، رسم کنید:

۱) r، A، $2p$ ۲) r_a، R، $2p$ ۳) r_a، r، $b-c$

۴) r_c، r_b، $b+c$ ۵) r_a، h_a، $b-c$ ۶) r_a، A، $b+c$

۷) r_c، $B-C$، $b+c$

۸) r، h_b+h_c، $b+c$ راهنمایی. $b+c$ و h_b+h_c زاویهٔ A را تعیین می‌کنند (§۲۱).

۹) r، h_c-h_b، $b-c$ ۱۰) h_c، r_c، $b+c$

۱۱) از مثلثی محل یک رأس و محل دو نقطهٔ تماس ضلع مقابل آن رأس با دایره‌های محاطی خارجی نسبت به دو ضلع دیگر، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۲) نشان دهید خطی که یک رأس مثلث را به نقطهٔ تماس ضلع مقابل آن رأس با دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع وصل می‌کند، محیط مثلث را نصف می‌کند.

۱۳) نشان دهید که سه دایره‌ای که مراکزشان رأسهای یک مثلث‌اند، و هر کدام از یکی از نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با اضلاع مثلث می‌گذرد، بر یکدیگر مماس‌اند.

۱۴) نشان دهید طول پاره‌خطی که از یک مرکز سه مماس به موازات یک ضلع مثلث رسم می‌شود، برابر است

با مجموع (یا تفاضل) دو پاره‌خطی که بین این دو خط موازی روی دو ضلع دیگر مثلث ایجاد می‌شود.

۱۵) سه خطی که به موازات سه ضلع یک مثلث بر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث مماس می‌شوند سه مثلث کوچک ایجاد می‌کنند. نشان دهید که مجموع محیطهای این سه مثلث برابر است با محیط مثلث مفروض.

۱۶) از یک نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید که با اضلاع زاویه‌ای مفروض، مثلثی با محیط مفروض تشکیل دهد.

۱۷) رابطهٔ $AZ \cdot BX \cdot CY = rS$ را ثابت کنید.

۱۸) از مثلثی، محل مرکز دایرهٔ محاطی خارجی، I_a، و محل خط نامحدود s که ضلع BC متناظر با I_a روی آن واقع است، و طول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، r، و طول شعاع دایرهٔ محیطی، R، مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید. راهنمایی. فاصلهٔ I_a تا s با r_a برابر است؛ پس II_a معلوم است (§۱۵۴)، و نقطهٔ وسط II_a به فاصلهٔ $\frac{1}{2}(r_a - r)$ از s قرار دارد (§۱۴۴ الف).

۱۹) نشان دهید که (الف) مجموع اضلاع زاویهٔ قائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه منهای وتر آن مثلث با قطر دایرهٔ محاطی داخلی آن مثلث برابر است؛ (ب) ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع شعاع داخلی، و شعاعهای داخلی دو مثلثی که این ارتفاع در مثلث ایجاد می‌کند.

۲۰) نشان دهید که مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه با حاصل‌ضرب دو پاره‌خطی که نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی با وتر، روی وتر ایجاد می‌کند برابر است.

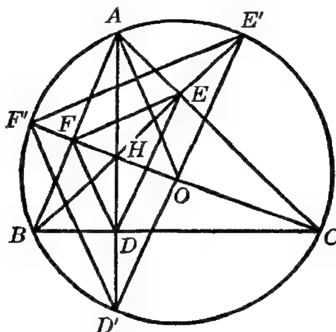
ه. ارتفاعها

I. مرکز ارتفاعی

۱۷۵. قضیه. سه ارتفاع مثلث همرس‌اند.

H را نقطهٔ برخورد دو ارتفاع BE و CF از مثلث ABC فرض کنید (شکل ۶۵)، و فرض کنید خط AH ضلع BC را در D قطع کند. نقاط E و F روی دایره‌ای قرار دارند که BC قطر آن‌است، و در چهار ضلعی محاطی $BCEF$ داریم $\angle FCB = \angle FEB$. به‌طور مشابه، در چهارضلعی محاطی $AEHF$ داریم $\angle FEH = \angle FAH$؛ بنابراین،

$$\angle BAD = \angle FAH = \angle FEH = \angle FEB = \angle FCB$$



شکل۶۵

پس دو مثلث ABD و BCF که در زاویهٔ B مشترک‌اند و دو زاویهٔ دیگرشان هم دوبه‌دو برابرند، همنهشت‌اند و داریم

$$\angle ADB = \angle BFC = 90^\circ$$

یعنی AHD ارتفاع سوم مثلث ABC است.

۱۷۶. تعریف. نقطهٔ برخورد سه ارتفاع مثلث مرکز ارتفاعی مثلث نامیده می‌شود. این نقطه را معمولاً با حرف H نشان می‌دهیم.

۱۷۷. قضیه. در هر مثلث حاصل‌ضرب پاره‌خطهایی که مرکز ارتفاعی روی هر ارتفاع جدا می‌کند مقداری ثابت است.

در واقع، در دو مثلث متشابه BHF و CHE (شکل ۶۵) داریم

$$HF : HE = BH : CH \quad \text{یا} \quad CH \cdot HF = BH \cdot HE$$

و به روشی مشابه می‌توان نشان داد که $BH \cdot HE = AH \cdot HD$.

روش دیگر. در دایرهٔ $BCEF$ (شکل ۶۵) داریم

$$BH \cdot HE = CH \cdot HF$$

۱۷۸. قضیه. روی هر ارتفاع مثلث، پاره‌خط بین مرکز ارتفاعی و محل برخورد امتداد ارتفاع بادایرهٔ محیطی مثلث، توسط ضلعی که ارتفاع بر آن وارد می‌شود، نصف می‌شود.

$\angle BD'D = \angle C$ (شکل ۶۵)، زیرا هر دو روبروی کمان AB از دایرهٔ محیطی هستند؛ همچنین $\angle BHD = \angle C$، زیرا اضلاع آنها دوبه‌دو بر هم عمودند. بنابراین، مثلث BHD' متساوی‌الساقین است و چون BD بر HD' عمود است، $HD = DD'$.

۱۷۹. نتیجه. حاصل‌ضرب پاره‌خطهایی که توسط پای ارتفاع وارد بر یک ضلع مثلث روی آن ضلع جدا می‌شود برابر است با حاصل‌ضرب آن ارتفاع در فاصلهٔ مرکز ارتفاعی از آن ضلع.

در واقع، در دایرهٔ محیطی ABC (شکل ۶۵) داریم $DB \cdot DC = DA \cdot DD'$ و $DD' = DH$ (§۱۷۸).

۱۸۰. قضیه. دایرهٔ محیطی مثلثی که رأسهای آن دو رأس یک مثلث مفروض و مرکز ارتفاعی آن مثلث هستند، با دایرهٔ محیطی آن مثلث مفروض همنهشت است.

دو مثلث HBC و $D'BC$ (شکل ۶۵) همنهشت‌اند (§۱۷۸)، و دایرهٔ محیطی $D'BC$ با دایرهٔ محیطی ABC همنهشت است؛ پس نتیجهٔ بیان شده حاصل می‌شود.

۱۸۱. قضیه. هر سه دایرهٔ همنهشتی که مراکزشان سه رأس یک مثلث باشند، اضلاع مثلث میانک متناظر را در شش نقطه قطع می‌کنند که از مرکز ارتفاعی مثلث مفروض همفاصله‌اند.

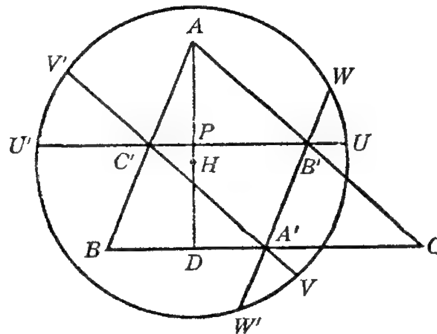
فرض کنید U، U'؛ V، V'؛ و W، W' نقاط تلاقی اضلاع $B'C'$، $C'A'$، و $A'B'$ از مثلث $A'B'C'$، یعنی مثلث میانک مثلث ABC، با سه دایرهٔ هم‌شعاع باشند که مراکزشان رأسهای A، B، C هستند (شکل ۶۶).

اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC و P نقطهٔ برخورد ارتفاع AD با ضلع $B'C'$ باشد، داریم

$$PU^2 = PU'^2 = AU^2 - AP^2 = HU^2 - HP^2$$

پس،

$$AU^2 - HU^2 = AP^2 - HP^2 = (AP + PH)(AP - PH)$$
$$= AH(PD - PH) = AH \cdot HD$$



شکل۶۶

یا

$$HU^{2} = AU^{2} - AH \cdot HD$$

حال بنابر فرض،

$$AU = BV = CW$$

پس (§۱۷۷)،

$$HU = HV = HW$$

۱۸۲. مسئله. مثلثی را که ارتفاعهای آن (h_c, h_b, h_a) مفروض‌اند رسم کنید.

داریم

$$ah_a = bh_b = ch_c (= 2S)$$

با تقسیم بر $h_a h_b$ به دست می‌آوریم

$$a : h_b = b : h_a = c : m$$

که درآن، $m = h_a h_b : h_c$ و بنابراین، می‌توان آن‌را به عنوان جزءِ چهارم تناسب بین ارتفاعهای مفروض رسم کرد.

پس مثلث مطلوب با مثلث DEF، که در آن $EF = h_b$، $FD = h_a$ و $DE = m$، متشابه است.

روی ارتفاع DK از این مثلث، DL را برابر h_a جدا می‌کنیم. خطی که از L به موازات EF رسم می‌شود، DE و DF را به ترتیب در رأسهای B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند و رأس سوم این مثلث، یعنی A، بر D منطبق است.

راه‌حل این مسئله به رسم مثلث DEF بستگی دارد، پس باید داشته باشیم

$$h_a + h_b > m > h_a - h_b$$

یا با قرار دادن مقدار m به جای آن و تقسیم بر $h_a h_b$:

$$\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_a}\right) > \frac{1}{h_c} > \left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}\right)$$

تمرین

۱) ثابت کنید مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث، مرکز ارتفاعی مثلث میانک آن مثلث است.

۲) از مثلثی محل مرکز ارتفاعی و محل یک رأس، و راستای اضلاعی که از آن رأس می‌گذرند مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۳) از مثلثی محل مرکز ارتفاعی و محل دو رأس، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۴) از مثلثی محل پای ارتفاعهای وارد بر اضلاع جانبی و محل خطی که قاعده روی آن قرار دارد، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۵) اگر p، q، و r فاصله‌های یک نقطهٔ داخل مثلث ABC از اضلاع مثلث باشند، نشان دهید که

$$(p : h_a) + (q : h_b) + (r : h_c) = ۱$$

این عبارت باید چه تغییری کند تا برای نقاط خارج مثلث معتبر باشد؟

۶) نشان دهید سه عمودی که در نقاط همنوا نسبت به پای ارتفاعهای یک مثلث بر اضلاع مثلث رسم می‌شوند، همرس‌اند.

۷) مثلثی مفروض است. نشان دهید اگر و تنها اگر معکوس یک ضلع این مثلث کوچکتر از مجموع و بزرگتر از تفاضل معکوسهای دو ضلع دیگر آن باشد، می‌توان مثلث دیگری رسم کرد که اضلاعش ارتفاعهای این مثلث مفروض باشند.

۸) خطی که در H، مرکز ارتفاعی مثلث ABC، بر ارتفاع HC از مثلث عمود می‌شود، دایرهٔ محیطی HBC را در P قطع می‌کند. نشان دهید که $ABPH$ متوازی الاضلاع است.

مثلثی را که اجزای زیر آن مفروض‌اند رسم کنید:

۹) m_a، h_c، h_b ۱۰) h_b، m_a، h_a

۱۱) مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث متغیری را که قاعده و زاویهٔ مقابل به قاعدهٔ ثابتی دارد، به دست آورید.

۱۲) برای ترسیم خطی که از نقطهٔ مفروض M و نقطهٔ دور از دسترس تلاقی دو خط مفروض p و q بگذرد، از نقطهٔ M خطوط u و v را به ترتیب بر p و q عمود می‌کنیم. خط مطلوب عمودی است که از M بر خط واصل نقاط (uq) و (pv) رسم می‌شود. این روش ترسیم را ثابت کنید.

II ـ مثلث پادک

۱۸۳. تعریف. مثلثی را که رأسهای آن پای ارتفاعهای یک مثلث مفروض‌اند، مثلث پادک آن مثلث می‌نامند.

۱۸۴. قضیه. سه مثلثی که مثلث پادک یک مثلث مفروض از آن مثلث جدا می‌کند، با آن مثلث متشابه‌اند.

زاویه‌های B و $\angle AEF$ مساوی‌اند (شکل ۶۵)، زیرا هر دو مکمل زاویهٔ FEC در چهار ضلعی محاطی $BCEF$ هستند؛ و به دلیلی مشابه $\angle AFE = \angle C$ ؛ پس مثلثهای AEF و ABC متشابه‌اند.

برای مثلثهای BDF و CDE نیز وضعیت چنین است.

۱۸۵. تعریف. در هر چهارضلعی محاطی دو ضلع روبرو را پادموازی نسبت به دو ضلع دیگر می‌نامند.

پس EF و BC (شکل ۶۵) نسبت به AB و AC پادموازی‌اند؛ و FD و AC نسبت به AB و BC پادموازی‌اند.

۱۸۶. قضیه. امتداد ارتفاعهایی که از دو رأس یک مثلث رسم می‌شوند روی دایرهٔ محیطی آن مثلث کمانی جدا می‌کنند که رأس سوم مثلث وسط آن است.

چهارضلعی $BCEF$ (شکل ۶۵) محاطی است، پس $\angle ABE = \angle ACF$؛ و در نتیجه کمان $AF' =$ کمان AE'.

برای رأسهای B و C هم وضعیت مشابهی وجود دارد.

۱۸۷. ملاحظه. خط EF وسط دو ضلع مثلث $HE'F'$ را به هم وصل کرده است؛ پس EF با ضلع EF' موازی است، و $EF = \frac{۱}{۲}E'F'$. مطلب مشابهی در مورد دو ضلع دیگر مثلث پادک DEF نیز صادق است.

بنابراین، مثلث DEF متناظر مثلث $D'E'F'$ در تجانس $(H, \frac{۱}{۲})$ است.

۱۸۸. قضیه. شعاعهایی از دایرهٔ محیطی یک مثلث که از رأسهای مثلث می‌گذرند بر اضلاع متناظر مثلث پادک عمودند.

در واقع، شعاع OA بر وتر $E'F'$ (۱۸۶§)، و بنابراین، بر EF عمود است (۱۸۷§).

۱۸۹. نتیجه. زاویه‌ای که یک ضلع مثلث با ضلع متناظر مثلث پادک می‌سازد برابر است با تفاضل زاویه‌های مجاور آن ضلع در مثلث مفروض (۷۳§).

۱۹۰. تعریف. مماسهایی که در رأسهای یک مثلث مفروض بر دایرهٔ محیطی آن مثلث رسم می‌شوند، مثلثی می‌سازند که مثلث مماسی آن مثلث خوانده می‌شود.

۱۹۱. قضیه. مثلثهای مماسی و پادک یک مثلث مفروض متجانس‌اند (به ۲۰۵§ مراجعه کنید).

در واقع، اضلاع متناظر این دو مثلث بر شعاعهای یکسانی از دایرهٔ محیطی مثلث اصلی عمودند (۱۸۸§).

۱۹۲. قضیه. ارتفاعهای مثلثی که زاویه‌های حاده دارد، نیمسازهای داخلی مثلث پادک آن مثلث هستند.

خط $D'A$ (شکل ۶۵) نیمساز زاویهٔ $F'D'E'$ است (۱۸۶§)، و خطوط DF و DE به ترتیب با خطوط $D'F'$ و $D'E'$ موازی‌اند (۱۸۷§)؛ بنابراین، $D'DA$ نیز نیمساز زاویهٔ FDE است. برای ارتفاعهای دیگر نیز چنین وضعیتی وجود دارد.

روش دیگر. در سه چهار ضلعی محاطی $BDHF$، $BCEF$ و $CDHE$ (شکل ۶۵) داریم

$$\angle HDF = \angle HBF = \angle EBF = \angle ECF = \angle ECH = \angle EDH$$

۱۹۳. نتیجه. اضلاع مثلثی که زاویه‌های حاده دارد نیمسازهای خارجی مثلث پادک آن مثلث هستند.

رأسها و مرکز ارتفاعی مثلث مفروض، مراکز سه مماس مثلث پادک آن مثلث هستند.

۱۹۴. مسئله. از مثلثی محل نقاط برخورد امتداد ارتفاعها با دایرهٔ محیطی مثلث مفروض است. مثلث را رسم کنید.

سه نقطهٔ مفروض D'، E'، و F' دایرهٔ محیطی (O) از مثلث مطلوب ABC را تعیین می‌کنند و رأسهای این مثلث وسط کمانهای $D'E'$، $E'F'$ و $F'E'$ است (۱۸۶§).

مسئله چند جواب می‌تواند داشته باشد؟

تمرین

۱) اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد و AH، BH، و CH دایرهٔ محیطی را به ترتیب در نقاط D'، E' و F' قطع کنند، ثابت کنید خطوطی که از D'، E' و F' به ترتیب به موازات OA، OB، و OC رسم می‌شوند، همرس‌اند.

۲) نشان دهید که (الف) حاصل‌ضرب پاره‌خطهایی که رأسی از مثلث پادک یک مثلث مفروض روی ضلع متناظر با آن رأس از مثلث مفروض جدا می‌کنند برابر است با حاصل‌ضرب اضلاعی از مثلث پادک که از آن رأس می‌گذرند؛ (ب) حاصل‌ضرب شش پاره‌خطی که توسط پای ارتفاعها روی اضلاع یک مثلث جدا می‌شوند، برابر است با مربع حاصل‌ضرب سه ضلع مثلث پادک آن مثلث.

۳) اگر P و Q پای عمودهایی باشند که از دو رأس B و C از مثلث ABC به ترتیب بر اضلاع DF و DE از مثلث پادک DEF رسم شده‌اند، نشان دهید که $EQ = FP$. راهنمایی. از ۱۹۳§ استفاده کنید.

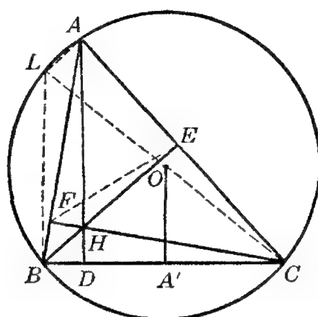
۴) DP و DQ عمودهایی هستند که از پای ارتفاع AD از مثلث ABC بر اضلاع AC و AB رسم شده‌اند، ثابت کنید که نقاط B، C، P و Q همدایره‌اند (روی یک دایره قرار دارند) و $\angle DPB = \angle CQD$.

۵) نشان دهید که چهار تصویر پای ارتفاع وارد بر هر ضلع روی دو ضلع دیگر و دو ارتفاع دیگر مثلث همخط‌اند. راهنمایی. از ۱۹۳§ و ۱۳۳§ استفاده کنید.

۶) نشان دهید که محیط مثلث پادک مثلث ABC که زاویه‌های حاده دارد، از دو برابر هر ارتفاع مثلث ABC کوچکتر است. راهنمایی. از ۱۹۲§ استفاده کنید.

۱۹۵. قضیه. فاصلهٔ هر ضلع مثلث از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث برابر است با نصف فاصلهٔ رأس مقابل آن ضلع از مرکز ارتفاعی مثلث.

فرض کنید L انتهای دیگر قطری از دایرهٔ محیطی باشد که از رأس C می‌گذرد (شکل ۶۷)؛ در این صورت، می‌گوییم L روبروی قطری C در دایرهٔ محیطی است. پاره‌خط OA' وسط دو ضلع مثلث قائم‌الزاویهٔ BCL را به هم وصل می‌کند؛ پس $OA' = \frac{۱}{۲}BL$.



شکل۶۷

از طرف دیگر هر جفت از اضلاع روبروی هم در چهارضلعی $ALBH$ به ترتیب بر خطوط AC و BC عمودند، پس $ALBH$ متوازی‌الاضلاع است و $BL = AH$؛ و قضیه ثابت می‌شود.

۱۹۶. قضیه. در هر مثلث فاصلهٔ هر رأس تامرکز ارتفاعی به اضافهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی متناظر با آن رأس، مقداری ثابت است (شکل۵۵).

داریم (۱۴۴§)

$$r_a - r = ۲KA' = ۲(KO - OA')$$

پس (۱۹۵§)،

$$۲OA' + r_a = AH + r_a = ۲KO + r = ۲R + r$$

و به طور مشابه،

$$BH + r_b = CH + r_c = ۲R + r$$

۱۹۷. قضیه. نسبت هر ضلع مثلث به ضلع متناظر از مثلث پادک آن مثلث برابر است بانسبت شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث به فاصلهٔ ضلع در نظر گرفته شده از مرکز دایرهٔ محیطی.

پاره‌خط AH (شکل ۶۷) قطر دایرهٔ محیطی مثلث AEF است، و خطوط BC و EF اضلاع متناظر دو مثلث متشابه AEF و ABC هستند (۱۸۴§)؛ بنابراین (۱۹۵§)،

$$BC : EF = ۲R : AH = R : OA'$$

۱۹۸. نتیجه. در مثلثی که زاویه‌های حاده دارد مجموع نسبتهای ضلعهای مثلث پادک به ضلعهای متناظر مثلث مفروض برابر است با نسبت مجموع شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث مفروض به شعاع دایرهٔ محیطی همان مثلث.

در واقع، مجموع این نسبتها برابر است با مجموع فاصله‌های اضلاع مثلث مفروض از مرکز دایرهٔ محیطی تقسیم بر شعاع دایرهٔ محیطی؛ بنابراین، با استفاده از ۱۴۶§ به گزارهٔ زیر می‌رسیم.

۱۹۹. قضیه. محیط مثلث پادک مثلثی که زاویه‌های حاده دارد برابر است با دو برابر مساحت مثلث مفروض تقسیم بر شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث.

اگر e، f، و g اضلاع مثلث پادک مثلث ABC باشند، داریم (۱۹۷§)

$$e + f + g = (a \cdot OA' + b \cdot OB' + c \cdot OC') : R$$

و مجموع داخل پرانتز دو برابر مساحت ABC است؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

۲۰۰. مسئله. از مثلثی محل نقاط برخورد قاعده با ارتفاع، نیمساز داخلی و میانهٔ رسم شده از رأس مقابل، که آنها را به ترتیب با D، U و A' نشان می‌دهیم، مفروض است؛ همچنین، فاصلهٔ رأس در نظر گرفته شده از مرکز ارتفاعی، d، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

در نقطهٔ A' عمودی بر DUA' رسم، و روی آن $A'O = \frac{1}{2}d$ را جدا کنید؛ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مطلوب ABC است (۱۹۳§). نقطهٔ A روی خطی قرار دارد که در D بر DUA' عمود می‌شود. اما نیمساز زاویهٔ A، نیمساز زاویهٔ DAO هم هست (۷۳§)؛ پس نقطهٔ A روی مماسی قرار دارد که از O بر دایرهٔ (U, UD) رسم می‌شود. پس A را می‌توان تعیین کرد.

دایرهٔ (O, OA) خط DUA' را در دو رأس B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

تمرین

۱) در مثلث ABC نشان دهید که $AH^{2} + BC^{2} = 4OA^{2}$.

۲) از مثلثی محل یک رأس، محل نقطهٔ وسط ضلع مقابل آن رأس و محل مرکز ارتفاعی مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۳) از مثلثی محل دایرهٔ محیطی و محل مرکز ارتفاعی، و طول یک ضلع مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۴) از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، فاصلهٔ یک رأس از مرکز ارتفاعی و میانه‌ای که از آن رأس رسم شود مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۵) از مثلثی قاعده، فاصلهٔ رأس روبروی قاعده از مرکز ارتفاعی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۶) دو سر پاره‌خط متغیری با طول ثابت روی دو خط متقاطع ثابت قرار دارد. ثابت کنید مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث متغیری که توسط این سه خط ایجاد می‌شود یک دایره است.

۷) قاعدهٔ BC و دایرهٔ محیطی (O) از مثلث متغیر ABC ثابت‌اند. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلثی را که رأسهای آن محل برخورد امتداد نیمسازهای داخلی مثلث ABC و دایرهٔ (O) هستند، به دست آورید.

III ـ خط اویلر

۲۰۱. قضیه. مرکز دایرهٔ محیطی، مرکز ارتفاعی و مرکز ثقل هر مثلث همخط‌اند، و فاصلهٔ مرکز ثقل تا مرکز ارتفاعی برابر است با دو برابر فاصلهٔ مرکز ثقل تا مرکز دایرهٔ محیطی.

فرض کنید Q نقطهٔ برخورد ارتفاع AD از مثلث ABC با خط OG باشد، که O مرکز دایرهٔ محیطی و

G مرکز ثقل مثلث است. دو مثلث AGQ و OGA' متشابه‌اند (A' وسط ضلع BC است)؛ پس،

$$GQ : OG = AG : GA' = ۲ : ۱$$

حال اگر ارتفاع دیگری را در نظر بگیریم، نقطهٔ برخورد آن با OG همان نقطهٔ Q خواهد بود، چون $GQ = ۲OG$. به عبارت دیگر، نقطهٔ Q بر مرکز ارتفاعی مثلث ABC، یعنی نقطهٔ H، منطبق است، و داریم $GH = ۲GO$.

توجه کنید که این اثبات جدیدی برای همرس بودن ارتفاعهای مثلث (§۱۷۵) است، و همچنین اثبات اینکه $AH = ۲OA'$ (§۱۹۵).

۲۰۲. تعریف. خط راستی که مرکز دایرهٔ محیطی، مرکز ارتفاعی و مرکز ثقل مثلث روی آن قرار دارند، خط اویلر مثلث نامیده می‌شود.

۲۰۳. قضیه. داریم

$$OH^۲ = ۹R^۲ - (a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

$$GH^۲ = ۴R^۲ - \frac{۴}{۹}(a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

در واقع داریم $OH = ۳OG$، $GH = ۲OG$ (§۲۰۱)؛ پس رابطه‌های بیان شده اثبات می‌شوند (§۱۱۰).

۲۰۴. قضیه. مجموع مربع فاصله‌های رأسهای یک مثلث از مرکز ارتفاعی آن مثلث برابر است با دوازده برابر مربع شعاع دایرهٔ محیطی منهای مجموع مربع ضلعهای مثلث.

$$HA^۲ + HB^۲ + HC^۲ = ۱۲R^۲ - (a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

این رابطه به‌آسانی از روابط قبلی (§۱۰۸، §۱۰۹، §۲۰۳) به دست می‌آید.

۲۰۵. قضیه. مرکز تجانس مثلث پادک و مثلث مماسی هر مثلث (§۱۹۱) روی خط اویلر آن مثلث قرار دارد.

مرکز دایره‌های محاطی داخلی مثلث مماسی (T) و مثلث پادک DEF از مثلث مفروض ABC، به ترتیب مرکز دایرهٔ محیطی O و مرکز ارتفاعی H (§۱۹۳) از مثلث ABC هستند؛ پس نقاط O و H نقاط متناظر در دو شکل متجانس هستند و بنابراین، با مرکز تجانس این شکلها همخط‌اند، و قضیه ثابت می‌شود.

اگر ABC مثلثی با زاویهٔ منفرجه باشد، نقاط O و H مراکز دایره‌های محاطی خارجی مثلثهای (T) و DEF خواهند بود.

تمرین

۱) از مثلثی محل نقاط O و A و طولهای HA و GA مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

۲) از مثلثی محل دایرهٔ محیطی و محل مرکز ثقل و تفاضل دو زاویه مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۳) دو وتر متعامد AB و CD در یک دایره حول نقطهٔ ثابت P می‌چرخند. نشان دهید که مراکز ارتفاعی دو مثلث متغیر ABC و ABD دایرهٔ یکسانی را می‌پیمایند. مکان هندسی مرکز ثقل این مثلثها را بیابید.

۴) نشان دهید خط اویلر مثلث تنها در صورتی از یک رأس مثلث می‌گذرد که مثلث متساوی‌الساقین یا قائم‌الزاویه باشد.

۵) نشان دهید خطی که از مرکز ثقل مثلث به نقطهٔ P بر روی دایرهٔ محیطی وصل می‌شود، از وسط خطی می‌گذرد که مرکز ارتفاعی مثلث را به روبروی قطری P وصل می‌کند.

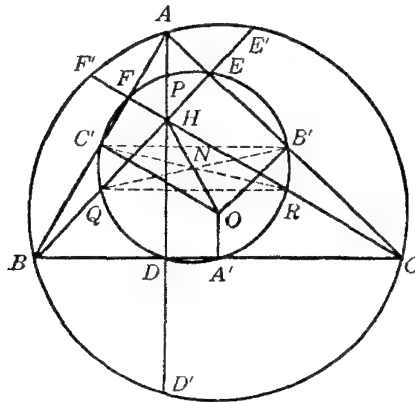
و. دایرهٔ نه نقطه

۲۰۶. تعریف. نقاط وسط پاره‌خطهایی که از مرکز ارتفاعی مثلث به رأسهای آن مثلث رسم می‌شوند، نقاط اویلر آن مثلث نامیده می‌شوند.

سه نقطهٔ اویلر رأسهای مثلث اویلر مثلث مفروض هستند.

۲۰۷. قضیه. در هر مثلث نقاط وسط اضلاع، پای ارتفاعها و نقاط اویلر روی یک دایره قرار دارند.

فرض کنید P، Q، و R نقاط اویلر مثلث ABC باشند (شکل ۶۸). پاره‌خطهای QC' و RB' برابر و موازی‌اند، زیرا نقاط وسط اضلاع جانبی دو مثلث AHB و AHC را که AH قاعدهٔ مشترک آنهاست به‌هم وصل می‌کنند؛ به‌علاوه این پاره‌خطها بر $B'C'$ عمودند، زیرا AH بر $B'C'$ عمود است. پس $B'C'QR$ مستطیل است؛ بنابراین، QB' و RC' برابرند و یکدیگر را در نقطه‌ای مانند N نصف می‌کنند. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که PA' با QB' برابر است و N نقطهٔ وسط آن‌است.



شکل۶۸

پس N مرکز دایرهٔ (N) است که از نقاط A'، B'، C'، P، Q، و R، و همچنین از نقاط D، E، و F می‌گذرد زیرا قطرهای PA'، QB'، و RC' از دایرهٔ (N) به ترتیب در این نقاط با زاویهٔ $90°$ دیده می‌شوند.

۲۰۸. تعریف. دایرهٔ (N) (§۲۰۷) را غالباً دایرهٔ نه نقطه و نقطهٔ N را مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث می‌نامند.

۲۰۹. قضیه. (الف) شعاع دایرهٔ نه نقطه برابر است با نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث.

(ب) مرکز دایرهٔ نه نقطه روی خط اویلر، با فاصلهٔ یکسان از مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث قرار دارد.

داریم (§۱۹۵)

$$OA' = \frac{1}{2}AH = AP = PH$$

پس $APA'O$ و $PHA'O$ متوازی‌الاضلاع‌اند. از متوازی‌الاضلاع بودن $APA'O$ نتیجه می‌شود که قطر PA' از دایرهٔ (N) با شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، یعنی AO، برابر است، و از متوازی‌الاضلاع بودن $PHA'O$ نتیجه می‌شود که قطر HO از نقطهٔ N، وسط قطر PA' می‌گذرد و N وسط آن‌است.

راه دیگر. مثلثهای ABC و $A'B'C'$ در تجانس $(G, -2)$ با یکدیگر متناظرند (§۹۸)؛ پس شعاع دایرهٔ محیطی ABC دو برابر شعاع دایرهٔ محیطی $A'B'C'$ است، و O و N مراکز دایره‌های محیطی ABC

و $A'B'C'$، در دو طرف G قرار دارند. پس $OG : GN = ۲$ و چون $۲OG = GH$ (§۲۰۱)، پس $ON = NH$.

۲۱۰. ملاحظه. دو نقطهٔ O و N، نقاط G و H را به طور همساز تقسیم می‌کنند.

در واقع، نقاط Nو O پاره‌خط HG را به‌طور داخلی و خارجی به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کنند.

در نتیجه دایرهٔ نه نقطهٔ (N) و دایرهٔ محیطی (O) در تجانس $(H, ۲ : ۱)$ و همچنین در تجانس $(G, -۲ : ۱)$ با هم متناظرند.

۲۱۱. قضیه. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مماسی یک مثلث مفروض روی خط اویلر آن مثلث قرار دارد.

مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مماسی (T) از مثلث ABC را نقطهٔ O'' و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث پادک DEF از مثلث ABC را نقطهٔ N فرض کنید. این دو نقطه، نقاط متناظر در تجانسی هستند که در آن مثلث (T) و مثلث DEF باهم متناظرند (§۱۹۱). مرکز این تجانس روی خط اویلر قرار دارد (§۲۰۵)، و در نتیجه، نقطهٔ N هم روی این خط قرار دارد (§۲۰۹ ب)؛ پس O'' نیز روی این خط قرار دارد.

۲۱۲. نتیجه. فرض کنید p شعاع دایرهٔ محاطی داخلی DEF، و R و q به‌ترتیب شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و (T) باشند. نسبت تجانس مثلثهای (T) و DEF با نسبت شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی آنها، یعنی $R : p$، و همچنین با نسبت شعاعهای دایره‌های محیطی آنها، یعنی $q : \frac{۱}{۲}R$، برابر است؛ پس،

$$R : p = q : \frac{۱}{۲}R \qquad \text{یا} \qquad R^۲ = ۲pq$$

به عنوان‌تمرین، این رابطه را با کلمات بیان کنید.

۲۱۳. قضیه. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث روی خط اویلر مثلثی قرار دارد که رأسهای آن نقاط تماس اضلاع مثلث مفروض با دایرهٔ محاطی داخلی آن است.

مثلث مفروض، مثلث مماسی مثلث دوم است؛ بنابراین قضیه ثابت می‌شود (§۲۱۱).

نکته. قضیه برای دایره‌های محاطی خارجی نیز صادق است.

۲۱۴. قضیه. تصاویر مرکز ارتفاعی مثلث روی دو نیمساز یک زاویهٔ آن مثلث، روی خطی قرار دارند که از وسط ضلع روبروی آن زاویه و مرکز دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث می‌گذرد.

J و J'، پای عمودهایی که از مرکز ارتفاعی مثلث ABC، یعنی H، بر نیمسازهای زاویهٔ A، یعنی AJ و AJ'، رسم شده‌اند (شکل ۶۹)، روی دایره‌ای به قطر AH قرار دارند. پس این دو نقطه دو سر قطری از دایرهٔ

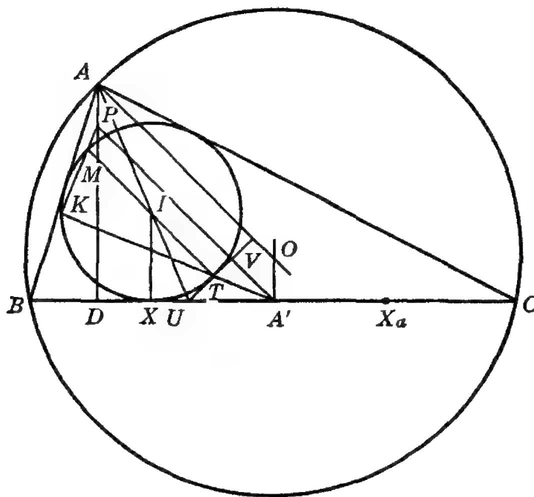
شکل۶۹

محیطی مثلث AEF، که در دایرهٔ (AH) محاط شده است، هستند و این قطر بر ضلع EF عمود است (§۷۹).

دایره‌ای که BC قطر آن‌است، از نقاط E و F می‌گذرد (§۱۷۵)، و دایرهٔ نه نقطه نیز از این نقاط می‌گذرد (§۲۰۷)؛ پس مراکز این دایره‌ها، یعنی A' و N، روی عمودمنصف ضلع EF، یعنی JJ' قرار دارند، و این اثبات قضیه را کامل می‌کند.

۲۱۵. قضیه فوئرباخ. دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث بر هر یک از چهار دایرهٔ سه مماس آن مثلث مماس است.

در مثلث ABC (شکل ۷۰) مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، I، و مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به رأس A، I_a، نقطهٔ A و نقطهٔ U، محل برخورد نیمساز AI و ضلع BC، را به صورت همساز تقسیم می‌کنند (§۱۲۰)؛ پس X و X_a، یعنی نقاط تماس دایره‌های سه‌مماس (I) و (I_a) با ضلع BC، نقاط U و D، پای ارتفاع AD از مثلث ABC، را به صورت همساز تقسیم می‌کنند (§۶۱).



شکل ۷۰

وسط پاره‌خط XX_a بر A'، وسط BC منطبق است (§۱۶۰)؛ بنابراین (§۶۳)،

$$A'U \cdot A'D = A'X^{۲} \qquad (۱)$$

T را نقطهٔ تماس مماس دوم UT که از U بر دایرهٔ محاطی داخلی (I) رسم می‌شود فرض کنید. خطوط UT و UX $(=BC)$ نسبت به AU متقارن‌اند؛ قطر AO از دایرهٔ محیطی ABC و ارتفاع AD نیز نسبت به AU متقارن‌اند (§۷۳ ب)؛ پس UT بر AO عمود است و بنابراین، اگر P نقطهٔ اویلر ارتفاع AD باشد بر قطر $A'P$ از دایرهٔ (N)، یعنی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC نیز عمود است (§۲۰۷).

فرض کنید K نقطهٔ تلاقی دوم (I) با $A'T$ باشد و $V = (A'P, UT)$. با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابه $A'DP$ و $A'VU$، و با استفاده از رابطهٔ (۱)، داریم

$$A'V \cdot A'P = A'D \cdot A'U = A'X^{۲} = A'T \cdot A'K$$

پس دو نقطهٔ V و P با دو نقطهٔ T و K همدایره‌اند؛ پس $\angle PKT = \angle TVA'$، یعنی PK بر KTA' عمود است، و در نتیجه، K روی دایرهٔ نه نقطه (N) قرار دارد، زیرا PA' یک قطر (N) است (§۲۰۷). به‌علاوه، نقطهٔ دوم تقاطع PK و (I)، یعنی نقطهٔ M، و نقطهٔ T دو سر یک قطر دایرهٔ (I) هستند.

خطوط TM و $A'VP$ موازی‌اند، زیرا هر دو بر UTV عمودند؛ پس $K = (PM, A'T)$ با نقاط وسط پاره‌خطهای TM و $A'P$ همخط است. TM و $A'P$ به ترتیب قطرهای دایره‌های (I) و (N) و K نقطهٔ مشترکی از این دو دایره است؛ پس (I) و (N) در نقطهٔ K بر هم مماس‌اند.

۲۱۶. ملاحظهٔ ۱. نقطهٔ K را نقطهٔ فوئرباخ دایرهٔ (I) می‌نامند.

از استدلال بالا نتیجه می‌شود که اگر T و X نسبت به نیمساز AU متقارن باشند، پای عمودی که از نقطهٔ اویلر P بر خط $A'T$ رسم می‌شود نقطهٔ فوئرباخ (I) خواهد بود.

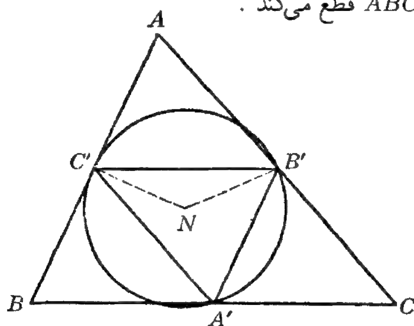
۲۱۷. ملاحظهٔ ۲. به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر T_a و X_a نسبت به AU متقارن باشند، پای عمود PK_a که از P بر خط $A'T_a$ رسم می‌شود، نقطهٔ فوئرباخ دایرهٔ محاطی خارجی (I_a) است.

برای دو دایرهٔ محاطی خارجی دیگر هم مطلب مشابهی صادق است.

۲۱۸. مسئله. از مثلثی محل مرکز دایرهٔ نه نقطه و محل رأس A، و راستاهای نیمساز داخلی t و ارتفاع h که از رأس مفروض A می‌گذرند مفروض است. مثلث را رسم کنید.

مرکز دایرهٔ محیطی O روی خط d که متقارن h نسبت به t است (۷۳§ ب)، و همچنین روی خط h' که متقارن خط h نسبت به نقطهٔ N، مرکز دایرهٔ نه نقطه، است (۲۰۹§ ب) قرار دارد؛ پس O و همچنین H، روی خط h، مشخص می‌شوند.

اگر D' نقطهٔ تلاقی دوم AH و دایرهٔ (O, OA) باشد، عمودمنصف HD' این دایره را در دو رأس دیگر B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.



شکل۷۱

۲۱۹. مسئله. از مثلثی محل مرکز دایرهٔ نه نقطه، و یک زاویه (هم‌اندازه و هم محل آن) مفروض است. مثلث را رسم کنید.

فرض کنید ABC مثلث مطلوب و A زاویهٔ مفروض آن باشد (شکل ۷۱). داریم

$$\angle B'NC' = ۲\angle B'A'C' = ۲A$$

پس زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین $NB'C'$ معلوم‌اند. بنابراین اگر رأس معلوم این مثلث، یعنی N، را ثابت نگاه داریم، و رأس B' خط ثابت مفروض AC را بپیماید (در حالی که مثلث با خودش متشابه می‌ماند)، نقطهٔ C' نیز یک خط راست را می‌پیماید (۵۱§)، و این خط راست روی خط معلوم AB نقطهٔ C' را مشخص می‌کند. حال چهارضلعی $AC'NB'$ را طوری رسم می‌کنیم که $\angle C'NB' = ۲A$، و حل مسئله به آسانی کامل می‌شود.

تمرین

۱) نشان دهید که مثلث مکمل و مثلث اویلر یک مثلث مفروض همنهشت‌اند.

۲) نشان دهید که مثلث $DB'C'$ با مثلث اویلر همنهشت است (شکل ۶۸).
۳) نشان دهید که میانهٔ AA' (شکل ۶۸) از وسط پاره‌خط OP می‌گذرد.
۴) اگر P نقطهٔ متقارن رأس A نسبت به ضلع مقابل این رأس، یعنی BC باشد، نشان دهید که اندازهٔ HP چهار برابر فاصله مرکز دایرهٔ نه نقطه از ضلع BC است.
۵) نشان دهید که مربع اندازهٔ مماسی که از یک رأس مثلث بر دایرهٔ نه نقطه رسم می‌شود برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاعی که از آن رأس می‌گذرد در فاصلهٔ ضلع مقابل آن رأس از مرکز دایرهٔ محیطی.
۶) نشان دهید که HA' دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ روبروی قطری رأس A قطع می‌کند.
۷) از سه رأس مثلث ABC سه خط موازی در راستای دلخواه، و از هر رأس خطی عمود بر این خطوط رسم می‌کنیم. به این ترتیب سه مستطیل حاصل می‌شود که اضلاع BC، CA و AB به ترتیب قطرهای آنها هستند. ثابت کنید که سه قطر دیگر این مستطیلها در نقطه‌ای روی دایرهٔ نه نقطه مثلث ABC یکدیگر را قطع می‌کنند.
۸) از مثلثی محل یک رأس، محل مرکز ارتفاعی و محل مرکز دایرهٔ نه نقطه، مفروض است. مثلث را رسم کنید.
۹) از مثلثی محل دو رأس و محل مرکز دایرهٔ نه نقطه، مفروض است. مثلث را رسم کنید.
۱۰) از مثلثی محل مرکز دایرهٔ محیطی و محل یک رأس، و فاصلهٔ آن رأس از مرکز ثقل ومرکز ارتفاعی مفروض است. مثلث را رسم کنید.
۱۱) از مثلثی محل دایرهٔ نه نقطه و محل مرکز ثقل، و تفاضل دو زاویه مفروض است. مثلث را رسم کنید.
۱۲) از مثلثی محل مرکز دایرهٔ نه نقطه، محل یک رأس و محل پای ارتفاع وارد بر یکی از ضلعهایی که از آن رأس می‌گذرد مفروض است. مثلث را رسم کنید.
۱۳) از مثلثی محل مرکز دایرهٔ نه نقطه، محل یک رأس و محل تصویر آن رأس بر ضلع مقابل، مفروض است. مثلث را رسم کنید.
۱۴) از مثلثی محل نقطهٔ وسط قاعده، محل نقطهٔ وسط یکی از کمانهایی که قاعده روی دایرهٔ محیطی جدا می‌کند و محل نقطهٔ اویلر نسبت به رأس مقابل به قاعده، مفروض است. مثلث را رسم کنید.
۱۵) اگر مثلث متغیری قاعدهٔ ثابت داشته باشد و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی آن نیز ثابت باشد، نشان دهید که دایرهٔ نه نقطهٔ آن بر دایرهٔ ثابتی مماس است.
۱۶) مثلث متغیری یک رأس ثابت و دایرهٔ نه نقطهٔ ثابت دارد. ثابت کنید که مکان هندسی مرکز ارتفاعی این مثلث یک دایره است.
۱۷) مرکز ارتفاعی، نقطهٔ وسط قاعده و راستای قاعدهٔ مثلث متغیری ثابت است. مکان هندسی مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ این مثلث را بیابید.
۱۸) ثابت کنید خطی که در وسط یک ضلع مثلثی مفروض بر دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث مماس است و ضلع در نظر گرفته شده، نسبت به دو ضلع دیگر مثلث پادموازی‌اند.

ز. چهارضلعی مرکز ارتفاعی

۲۲۰. تعریف. اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد (شکل ۷۲)، هرکدام از چهار نقطهٔ A، B، C، و H مرکز ارتفاعی مثلث متشکل از سه نقطهٔ دیگر است، این مطلب را به آسانی می‌توان از شکل دریافت.

هر چهار نقطه‌ای که این خاصیت را داشته باشند، یک گروه نقاط مرکز ارتفاعی یا یک چهارضلعی مرکز ارتفاعی نامیده می‌شوند؛ چهار مثلثی که این چهار نقطه سه به‌سه، مشخص می‌کنند، گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی نامیده می‌شوند.

۲۲۱. قضیه. چهار مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی، مثلث پادک یکسانی دارند.

این مطلب با توجه به شکل واضح است.

۲۲۲. نتیجهٔ ۱. چهار مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی، دایرهٔ نه نقطهٔ یکسانی دارند.

در واقع، این دایره، دایرهٔ محیطی مثلث پادک مشترک آنهاست (۲۰۷§).

۲۲۳. نتیجهٔ ۲. شعاع دایره‌های محیطی چهار مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی برابرند.

در واقع، شعاع دایره‌های محیطی این مثلثها با قطر دایرهٔ محیطی دایرهٔ نه نقطهٔ مشترک آنها برابرند (۲۰۹§ الف).

۲۲۴. قضیه. مراکز دایره‌های محیطی یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی، یک گروه نقاط مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند.

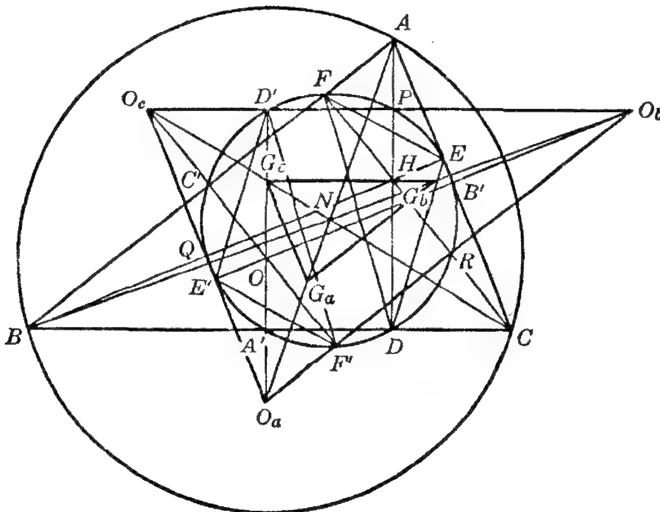
O، O_a، O_b، و O_c مراکز دایره‌های محیطی چهار مثلث ABC، BCH، CHA، و HAB از یک گروه مرکز ارتفاعی (شکل ۷۲) نقاط متقارن H، A، B، C یعنی مراکز ارتفاعی این مثلثها، نسبت به N، مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مشترک آنها هستند (۲۲۲§، ۲۰۹§ ب)؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

۲۲۵. نتیجهٔ ۱. یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی و گروه مرکز ارتفاعی متشکل از مراکز دایره‌های محیطی آنها، دایرهٔ نه نقطهٔ مشترکی دارند.

دو چهارضلعی مرکز ارتفاعی $HABC$ و $OO_aO_bO_c$ نسبت به N مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ گروه $HABC$ متقارن‌اند؛ پس دایرهٔ نه نقطهٔ $OO_aO_bO_c$ نسبت به (N)، یعنی دایرهٔ نه نقطهٔ $HABC$ متقارن است. چون متقارن هر دایره نسبت به مرکز آن دایره خود آن دایره است، قضیه ثابت می‌شود.

۲۲۶. نتیجهٔ ۲. چهار رأس یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی مفروض را می‌توان مراکز دایره‌های محیطی یک گروه مثلث مرکز ارتفاعی دیگر دانست.

در واقع، دوگروه $HABC$ و $OO_aO_bO_c$ نسبت به (N)، یعنی مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مشترکشان متقارن‌اند؛ پس گروه اول را می‌توان از گروه دوم، دقیقاً به همان صورتی که گروه دوم از گروه اول به دست آمده است، به دست آورد.



شکل۷۲

۲۲۷. قضیه. چهار مرکز ثقل یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند.

مرکز ثقلهای G، G_a، G_b، و G_c از چهار مثلث ABC، BCH، CHA، و HAB در یک گروه مرکز ارتفاعی (شکل ۷۲) در تجانس $(N, -\frac{1}{3})$ با مراکز ارتفاعی H، A، B، و C از این مثلثها متناظرند (§۲۰۹)؛ بنابراین، قضیه ثابت می‌شود.

۲۲۸. قضیه. دایرهٔ نه نقطهٔ یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی با دایرهٔ نه نقطهٔ گروه مرکز ارتفاعی متشکل از مرکز ثقلهای گروه مفروض، هم مرکز است.

در واقع، دایرهٔ نه نقطهٔ (N_g) ازگروه مرکز ارتفاعی $GG_aG_bG_c$ (§۲۲۷) در تجانس $(N, -\frac{1}{3})$ با دایرهٔ نه نقطهٔ (N) ازگروه $HABC$ متناظر است؛ پس N مرکز مشترک دو دایرهٔ (N) و (N_g) است.

تمرین

۱) نشان دهید که خطوط اویلر چهار مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی همرس‌اند.

۲) نشان دهید که متقارن مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث نسبت به یک ضلع بر متقارن رأس مقابل آن ضلع نسبت به مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث منطبق است.

۳) نشان دهید که چهار رأس یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی را می‌توان مراکز ثقل یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی دیگر در نظر گرفت، به طوری که هر دو گروه مرکز نه نقطهٔ یکسانی داشته باشند ، و این نقطه مرکز تشابه دو گروه، و نسبت تشابه ۳− باشد.

۴) نشان دهید که مراکز دایره‌های محیطی و مراکز ثقل یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی ، دو گروه نقاط مرکز ارتفاعی هستند که مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ یکسانی دارند، این نقطه مرکز تجانس دو گروه، و نسبت تجانس ۳ است.

۵) نشان دهید که مراکز دایره‌های محیطی مثلثهای HBC، HCA و HAB از یک گروه مرکز ارتفاعی $HABC$، مثلثی همنهشت با مثلث ABC تشکیل می‌دهند؛ اضلاع دو مثلث موازی‌اند، و نقطهٔ H مرکز دایرهٔ محیطی مثلث جدید است؛ همچنین، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC مرکز ارتفاعی مثلث جدید است.

۶) نشان دهید که مراکز ثقل مثلثهای HBC، HCA، و HAB از گروه مرکز ارتفاعی $HABC$ مثلثی متشابه با مثلث ABC تشکیل می‌دهند و اضلاع مثلث جدید با اضلاع مثلث ABC موازی‌اند؛ و مرکز ارتفاعی مثلث جدید بر مرکز ثقل مثلث ABC منطبق است.

۷) از مثلثی پای ارتفاعهای آن مفروض‌اند؛ مثلث را رسم کنید.

۸) از مثلث ABC، محل مرکز دایرهٔ نه نقطه و محل مراکز دایره‌های محیطی مثلثهای CAH و ABH که H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۹) نشان دهید که مجموع جبری فواصل نقاط یک گروه مرکز ارتفاعی از هر خطی که از مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ آن گروه می‌گذرد، صفر است.

۱۰) مثلث ABC زاویهٔ قائمه‌ای در رأس A دارد، و AD ارتفاع آن است. نیمسازهای زاویه‌های BAD و CAD ضلع BC را در S و S' قطع می‌کنند، و نیمسازهای زاویه‌های ABD و ACD ارتفاع AD را در T و T' قطع می‌کنند. اگر U، V و W مراکز دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABC، ABD و ACD باشند، نشان دهید که (الف) نقاط A، U، V، و W یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند؛ (ب) مرکز دایرهٔ محیطی AVW روی AD قرار دارد؛ (ج) نقاط B، C، V، و W همدایره هستند؛ و (د) نقاط S، S'، T، و T' یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند. خاصیتهای دیگر شکل را بیان و ثابت کنید.

۲۲۹. قضیه. چهار مرکز سه مماس مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند.

در واقع، ارتفاعهای مثلث $I_aI_bI_c$ که از نیمسازهای خارجی مثلث ABC تشکیل شده است، نیمسازهای داخلی ABC هستند؛ پس I، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC مرکز ارتفاعی مثلث $I_aI_bI_c$ است و قضیه ثابت می‌شود (۲۲۰§).

۲۳۰. نتیجه. هر مثلث و دایرهٔ محیطی آن به‌ترتیب مثلث پادک و دایرهٔ نه نقطهٔ گروه مرکز ارتفاعی متشکل از مراکز سه مماس مثلث مفروض هستند.

۲۳۱. ملاحظهٔ ۱. با توجه به گزاره‌های بالا (۲۲۹§، ۲۳۰§) می‌توان نتیجه گرفت که‌همهٔ ویژگیهای یک گروه نقاط مرکز ارتفاعی را می‌توان به مراکز دایره‌های محاطی یک مثلث نیز نسبت داد. به این ترتیب یک دسته گزاره به دست می‌آوریم که گزاره‌های زیر نمونه‌ای از آنها هستند.

(الف) شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی که رأسهای آن هر سه تایی از چهار مرکز سه مماس مثلث مفروضی باشند، با قطر دایرهٔ محیطی آن مثلث مفروض برابر است (۲۲۳§).

(ب) نقطهٔ متقارن هر مرکز سه مماس یک مثلث مفروض، نسبت به مرکز دایرهٔ محیطی آن مثلث، مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی است که رأسهای آن سه مرکز سه مماس دیگر مثلث مفروض هستند (۲۲۴§).

(ج) مراکز دایره‌های محیطی چهار مثلثی که توسط چهار مرکز سه مماس یک مثلث مفروض تعیین می‌شوند، مراکز سه مماس مثلث متقارن با مثلث مفروض، نسبت به مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث، هستند.

در واقع، مراکز دایره‌های محیطی مثلثهای گروه مرکز ارتفاعی $II_aI_bI_c$ (۲۲۹§) حتماً متقارن این نقاط نسبت به مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ این گروه هستند (۲۲۴§)، و این مرکز نه نقطه بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، نقطهٔ O، منطبق است (۲۳۰§).

۲۳۲. ملاحظهٔ ۲. گزاره‌های بالا (۲۳۱§) با در نظر گرفتن مثلث ABC به عنوان مثلث پادک مثلثی که رأسهای آن مراکز سه مماس مثلث ABC هستند به دست آمده‌اند. حال آنکه در بررسی مرکز ارتفاعی (۱۷۵§) و دایرهٔ نه نقطه، مثلث ABC مثلث اصلی با مرکز ارتفاعی و دایرهٔ نه نقطهٔ مستقل در نظر گرفته شده بود. به این ترتیب، یک مثلث می‌تواند نقش دوگانه‌ای در رابطه با مرکز ارتفاعی از یک طرف و مراکز سه مماس از طرف دیگر بازی کند. این نقش دوگانه «ترجمه» یا «تبدیل» ویژگیهای به دست آمده برای مرکز ارتفاعی به ویژگیهای مراکز سه مماس و برعکس را، بدون نیاز به اثبات مجدد ویژگیهای حاصل، امکانپذیر می‌سازد.

مثلاً با در نظر گرفتن مثلث ABC به عنوان مثلث اصلی، متوجه شدیم که دایره‌ای که AH قطر آن‌است از نقاط E و F می‌گذرد (۱۷۵§) و مرکزش، P، روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد (۲۰۷§). ولی A و H مراکز سه مماس مثلث پادک DEF از مثلث ABC هستند (۱۹۲§، ۱۹۳§). پس اگر ABC را مثلث پادک گروه مراکز سه مماس آن، یعنی I، I_a، I_b، و I_c در نظر بگیریم، می‌توانیم بگوییم دایره‌ای که II_a قطر آن است از رأسهای B و C از مثلث ABC می‌گذرد و مرکز آن روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد. ولی این گزاره را به طور مستقل نیز اثبات کردیم (۱۲۲§).

دایره‌ای که I_bI_c قطر آن‌است، بادایره‌ای که BC قطر آن‌است، متناظر است. هر دوی این دایره‌ها را قبلاً به‌طور مستقل در نظر گرفتیم (۱۲۲§ و ۱۷۵§).

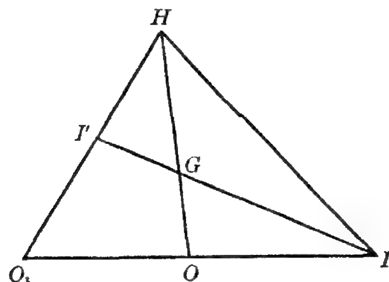
خواننده خود می‌تواند نمونه‌هایی دیگر از این نوع پیدا کند.

۲۳۳. قضیه. مساحت مثلثی که رأسهای آن مراکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث حادهٔ مفروضی هستند، با حاصل‌ضرب محیط و شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث برابر است.

۲۳۴. قضیه. در هر مثلث حاده، مجموع فواصل رأسها از اضلاع متناظر مثلث پادک برابر است با مجموع قطر دایرهٔ محیطی مثلث مفروض و فاصلهٔ مرکز ارتفاعی از یک ضلع مثلث پادک.

اینها «ترجمهٔ» ویژگیهایی هستند که قبلاً اثبات شده‌اند (§۱۹۹، §۱۴۵).

۲۳۵. قضیه. پاره‌خطی که مرکز ارتفاعی مثلث مفروضی را به مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی که رأسهای آن مراکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث هستند وصل می‌کند، توسط مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث میانک مثلث مفروض نصف می‌شود.



شکل۷۳

O_i، مرکز دایره محیطی مثلث $I_aI_bI_c$ (شکل ۷۳)، که رأسهای آن مراکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC هستند، متقارن نقطهٔ I، مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC، نسبت به O، مرکز دایره محیطی مثلث ABC است (§۲۳۱ ب). اگر H و G به ترتیب مرکز ارتفاعی و مرکز ثقل مثلث ABC باشند، نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث HIO_i نیز هست، زیرا $HG = ۲GO$ (§۲۰۱)؛ پس خط IG از وسط HO_i، یعنی نقطهٔ I' می‌گذرد. به‌علاوه، $IG = ۲GI'$، یعنی I' و I در تجانس $(G, -\frac{۱}{۲})$ متناظرند. پس I' نقطه‌ای است که در $A'B'C'$، مثلث میانک مثلث ABC، با مرکز دایرهٔ محاطی داخلی I از مثلث ABC متناظر است (§۹۸) و قضیه ثابت می‌شود.

۲۳۶. قضیه. در هر مثلث حاده، خطهای متقارن اضلاع مثلث پادک نسبت به اضلاع متناظر مثلث مفروض، مثلثی تشکیل می‌دهند که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مفروض منطبق است.

فرض کنید O_a نقطهٔ متقارن O، یعنی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مفروض ABC، نسبت به ضلع BC باشد. پاره‌خطهای OO_a و AH (شکل ۷۲) مساوی و موازی‌اند؛ پس OA و HO_a مساوی و موازی‌اند. شعاع $OA = R$ بر ضلع $d = EF$ از مثلث پادک DEF عمود است (§۱۸۸)؛ پس HO_a نیز بر d عمود است، یعنی اگر HO_a خط d را در نقطهٔ L قطع کند، پاره‌خط $HL = m$ شعاع دایره محاطی داخلی مثلث DEF است (§۱۹۲).

حال اگر d' متقارن d نسبت به BC باشد، فاصلهٔ O از d' با فاصلهٔ O_aL از d برابر است، زیرا O و O_a نیز نسبت به BC متقارن‌اند؛ به‌علاوه، فاصلهٔ $O_aL = R + m$ به انتخاب ضلع d از مثلث DEF بستگی ندارد؛ پس O از اضلاع d'، e'، و f' از مثلث $d'e'f'$ که از d' و دو ضلع مشابه‌اش e' و f' تشکیل می‌شود، همفاصله است.

۲۳۷. ملاحظهٔ ۱. ضمن اثبات بالا، ثابت کردیم که شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $d'e'f'$ با مجموع شعاع دایرهٔ محیطی مثلث مفروض و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث پادک آن برابر است.

۲۳۸. ملاحظهٔ ۲. مثلث ABC مثلث حادهٔ گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی $ABCH$ است، که DEF مثلث پادک مشترک آنهاست. گزاره‌های قبلی (§۲۳۶ و §۲۳۷) را می‌توان طوری تغییر داد که در مورد مثلثهای دیگر گروه مرکز ارتفاعی نیز صادق باشند. این کار را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۲۳۹. ملاحظهٔ ۳. اگر در گزاره‌های قبل (§۲۳۶، §۲۳۷) DEF را مثلث مفروض فرض کنیم؛ نقاط B و C دو مرکز دایره‌های محاطی خارجی آن خواهند بود؛ خط d بر دایره‌های محاطی خارجی متناظر (B) و (C)

مماس است؛ بنابراین، d'، متقارن d نسبت به خط‌المرکزین BC نیز بر (B) و (C) مماس است؛ یعنی d' چهارمین مماس مشترک این دو دایره (علاوه بر اضلاع DEF) است. نقطهٔ O مرکز دایرهٔمحیطی مثلثی است که رأسهای آن مراکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث مفروض DEF هستند. پس گزاره‌های فوق (۲۳۶§، ۲۳۷§) را می‌توان به صورت زیر «ترجمه» کرد (۲۳۲§).

اگر دایره‌های محاطی خارجی یک مثلث حاده را دو به دو در نظر بگیریم، چهار مماس مشترک آنها مثلث دیگری می‌سازند که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی‌اش بر مرکز دایره محیطی مثلثی که رأسهای آن مراکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث مفروض هستند، منطبق است؛ و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن با مجموع شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و قطر دایرهٔ محیطی مثلث مفروض برابر است.

تمرین

۱) مثلث متغیر ABC دارای دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محیطی ثابتی است. نشان دهید که مثلث $A'B'C'$ که رأسهای آن نقاط برخورد نیمسازهای خارجی مثلث ABC و دایرهٔ محیطی ABC هستند، دارای مرکز ارتفاعی، مرکز ثقل و مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ ثابتی است.

۲) محل مرکز دایرهٔ محیطی O از مثلث ABC، و محل مراکز دایره‌های محیطی مثلثهای II_bI_c و II_cI_a مفروض است. مثلث ABC را رسم کنید.

۳) دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D، E، و F به ترتیب بر اضلاع BC، CA و AB مماس است؛ I مرکز این دایره است؛ L، M، و N به ترتیب مرکز ارتفاعی مثلثهای IBC، ICA و IAB هستند. ثابت کنید که (الف) DL،EM، و FN با شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC برابرند؛ (ب) MN، NL، و LM به ترتیب از نقاط D، E، و F می‌گذرند؛ (ج) مثلثهای LMN و ABC هم‌ارزند؛ (د) اگر دایره‌های محاطی خارجی نسبت به رأسهای A، B، و C به‌ترتیب در نقاط D_1، E_1، و F_1 بر BC، CA و AB مماس باشند، خطوط MN، NL، و LM به ترتیب بر AD_1، BE_1، و CF_1 عمودند؛ و خطوط MN، NL، و LM به ترتیب خطوط AD_1، BE_1 و CF_1 را روی دایرهٔ محاطی داخلی قطع می‌کنند.

تمرین برای مرور

دایرهٔ محیطی

۱) مثلثی را که m_a، t_a، و $B-C$ از آن مفروض‌اند، رسم کنید.

۲) از مثلثی محل نقاط برخورد ارتفاع، میانه و نیمساز رسم شده از یک رأس با دایرهٔ محیطی مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

۳) از مثلثی تفاضل زاویه‌های قاعده، و محل نقاط برخورد ارتفاع، میانه، و نیمساز رسم شده از رأس مقابل قاعده با قاعده، مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

۴) نشان دهید که عمودمنصف نیمساز AU از مثلث ABC، خطی که در نقطهٔ U بر ضلع BC عمود است و قطری از دایرهٔ محیطی که از رأس A می‌گذرد، همرس‌اند.

۵) از U، پای نیمساز AU از مثلث ABC، عمود UQ را بر شعاع AO از دایرهٔ محیطی ABC رسم می‌کنیم تا AC را در P قطع کند. ثابت کنید که AP با AB برابر است.

۶) روی دایره‌ای مفروض نقطه‌ای بیابید، به‌طوری که خطوط رسم شده از آن به دو نقطهٔ مفروض دایره را در دو سر وتری با طول معلوم قطع کنند.

۷) روی دایره‌ای مفروض نقطه‌ای بیابید، به طوری که این نقطه و دو نقطه‌ای که از برخورد دایره با خطوطی که این نقطه را به دو نقطهٔ مفروض وصل می‌کنند حاصل می‌شوند مثلثی بسازند که زاویهٔ مفروضی داشته باشد. (دو حالت را در نظر بگیرید: حالتی که زاویهٔ مفروض با زاویهٔ بین دو ضلعی که از دو نقطهٔ

مفروض می‌گذرند برابر باشد و حالتی که زاویهٔ مفروض باآین زاویه برابر نباشد.)

۸) در یک دایرهٔ مفروض مثلثی با زاویهٔ رأس مفروض را چنان محاط کنید که قاعده‌اش بر دایرهٔ مفروض دیگری مماس و یک ضلع دیگرش نیز بر دایرهٔ مفروض سومی مماس باشد.

۹) پاره‌خط BC با طول ثابت طوری حرکت می‌کند که دو سرش روی دو خط ثابت AB و AC می‌مانند. نشان دهید که دایرهٔ محیطی مثلث ABC بر دایرهٔ ثابتی مماس است.

۱۰) مثلثی را با مفروض بودن یک زاویه، ارتفاع رسم شده از رأس این زاویه و مجموع فاصله‌های پای این ارتفاع از دو ضلع دیگر رسم کنید.

۱۱) نشان دهید که در هر مثلث پای ارتفاع وارد بر قاعده و تصویرهای دوسر قاعده بر قطری از دایرهٔ محیطی که از رأس مقابل قاعده می‌گذرد، روی دایره‌ای قرار دارند که مرکزش وسط قاعده است.

میانه‌ها

۱۲) نیمساز داخلی زاویهٔ B از مثلث ABC اضلاع $B'C'$ و $B'A'$ از مثلث میانک مثلث ABC را در نقاط A'' و C'' قطع می‌کند. ثابت کنید AA'' و CC'' بر نیمساز عمودند و $B'A'' = B'C''$. مشابه این مطلب را برای نیمساز خارجی نیز ثابت کنید.

۱۳) A'، B'، و C' نقاط برخورد میانه‌های مثلث ABC با دایرهٔ محیطی هستند. اگر $B'C' = a'$، $C'A' = b'$، و $A'B' = c'$، نشان دهید که (با توجه به نمادهای متداول در مورد مثلث ABC) داریم

$$am_a : a' = bm_b : b' = cm_c : c'$$

۱۴) نشان دهید خطوطی که از رأسهای A، B، و C از مثلث ABC به ترتیب به موازات میانه‌های رسم شده از رأسهای B، C، و A رسم می‌شوند مثلثی تشکیل می‌دهند که مساحتش سه برابر مساحت مثلث ABC است.

۱۵) از یک مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانهٔ وارد بر یکی از اضلاع جانبی مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱۶) R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، G مرکز ثقل آن، r'، r''، و r''' به‌ترتیب شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای BCG، CAG و ABG و r شعاع دایرهٔ محیطی مثلث تشکیل شده از میانه‌های مثلث ABC است. نشان دهید که $۴Rr^۲ = ۳r'r''r'''$.

۱۷) دایرهٔ متغیری از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد. اگر M نقطهٔ دوم برخورد دایره و خط ثابتی باشد که از A می‌گذرد، مکان هندسی مرکز ثقل مثلثی که رأسهای آن A، M و مرکز دایره هستند، و مکان هندسی نقطهٔ وسط شعاعی را که از M می‌گذرد به دست آورید.

۱۸) از G، مرکز ثقل مثلث ABC خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB و AC را به ترتیب در A_b و A_c قطع کند؛ به‌همین ترتیب از G خطی به موازات CA رسم می‌کنیم تا BC و BA را به ترتیب در B_c و B_a قطع کند و خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا CA و CB را به ترتیب در C_a و C_b قطع کند. ثابت کنید که دو مثلث $A_cB_aC_b$ و $A_bB_cC_a$ برابرند.

۱۹) ضلع BC از مثلث ABC را از طرف C تا نقطهٔ $A_۱$ امتداد می‌دهیم به‌طوری که $CA_۱ = k \cdot BC$. به همین ترتیب نقاط $B_۱$ و $C_۱$ را طوری می‌یابیم که $AB_۱ = k \cdot CA$ و $BC_۱ = k \cdot AB$؛ $A_۲$، $B_۲$، و $C_۲$ را نقاط وسط پاره‌خطهای $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ فرض کنید. نشان دهید که (الف) سه مثلث ABC، $A_۱B_۱C_۱$، و $A_۲B_۲C_۲$ مرکز ثقل یکسانی دارند؛ (ب) نسبت مساحتهای مثلثهای $A_۲B_۲C_۲$ و ABC برابر است با $(۱ + ۳k + ۳k^۲)\frac{۱}{۴}$. حالتهای خاص $k = ۱$ و $k = \frac{۱}{۳}$ را در نظر بگیرید. ویژگیهای دیگر شکلهای توصیف شده در این تمرین را بیابید.

دایره‌های سه مماس

۲۰) نیمساز زاویه‌ای را که رأس آن دور از دسترس است، رسم کنید.

۲۱) ثابت کنید اگر نیمساز داخلی یک زاویهٔ مثلث نیمساز زاویهٔ متشکل از دو نیمساز داخلی دیگر هم باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

۲۲) از مثلثی مساحت، یک زاویه و طول پاره‌خطی که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به رأس زاویهٔ مفروض را به هم وصل می‌کند، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۲۳) دایره‌ای که از D، پای ارتفاع AD و نقاط I و I_a از مثلث ABC می‌گذرد، AD را در L هم قطع می‌کند. نشان دهید که AL با قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر است. گزاره متناظری را در مورد دو مرکز دایره‌های محاطی خارجی بیان و آن‌را اثبات کنید.

۲۴) طول ضلع BC از مثلث متغیر ABC و محل نقاط I_b و I_c از آن مفروض است. نشان دهید که (الف) رأس A روی یک خط راست حرکت می‌کند؛ (ب) راستاهای AB و AC ثابت‌اند؛ (ج) شعاع دایرهٔ محیطی ABC ثابت است؛ و (د) مرکز دایرهٔ محیطی ABC روی یک دایره حرکت می‌کند.

مثلثی را که اجزای زیر از آن مفروض است، رسم کنید.

۲۵) a، r، $b \pm c$ ۲۶) a، h_a، $b-c$ ۲۷) r، r_a، S

۲۸) از مثلث ABC زاویهٔ A و شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی دو مثلث ABI و ACI که I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ABC است مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

۲۹) از نقطهٔ برخورد قاعدهٔ یک مثلث و نیمساز داخلی زاویهٔ مقابل آن مماسی بر دایرهٔ محاطی داخلی رسم می‌کنیم. ثابت کنید زاویه‌ای که این مماس با قاعده می‌سازد با تفاضل دو زاویهٔ قاعده برابر است.

۳۰) از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع شعاع یک دایرهٔ محاطی خارجی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، و طول خط‌المرکزین این دو دایره (R، $r_a + r$، $II_a = ۲d$) مفروض است. مثلث را رسم کنید. راهنمایی. فاصلهٔ هر نقطهٔ K روی دایرهٔ محیطی (O) از وتر مشترک (O) و دایرهٔ (K, d) برابر است با $\frac{۱}{۲}(r_a - r)$ (§۱۴۴ الف)؛ پس r و r_a را می‌توان یافت.

۳۱) اضلاع مثلث مفروضی پاره‌خطهای n_a، n_b، و n_c را روی خطوطی که از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی به موازات اضلاع رسم شده است، جدا می‌کنند. نشان دهید که

$$(n_a : a) + (n_b : b) + (n_c : c) = ۲ \quad , \quad ۴S = (n_a h_a + n_b h_b + n_c h_c)$$

گزاره‌های متناظری را برای مراکز دایره‌های محاطی خارجی بیان و اثبات کنید. راهنمایی.

$$n_a : a = (h_a - r) : h_a$$

۳۲) نشان دهید که فواصل مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث از میانه‌های مثلث برابر است با

$$(b-c)r : ۲m_a \quad , \quad (c-a)r : ۲m_b \quad , \quad (a-b)r : ۲m_c$$

روابط متناظر برای مراکز دایره‌های محاطی خارجی را بیان و اثبات کنید.

مثلثی را که اجزای زیر از آن مفروض است، رسم کنید.

۳۳) r، A، S. راهنمایی. S و r، p را تعیین می‌کنند و در نتیجه، مثلث AI_aZ_a مشخص می‌شود.

۳۴) $a-b$، A، r. راهنمایی. از مثلث AIZ، $AZ = \frac{۱}{۲}(b+c-a)$ را می‌دانیم که همراه با $a-b$، ضلع c را تعیین می‌کنند.

۳۵) $a-c$، A، r.

۳۶) a، h_b، r. راهنمایی. h_b و a زاویهٔ C را تعیین می‌کنند؛ پس مثلث IXC مشخص است.

۳۷) $r_b - r_c$،A،$b+c$

۳۸) $r_b + r_c$،$B-C$،$b+c$

۳۹) $r_a - r_b$،A،$2p$

۴۰) خطی که پای نیمساز داخلی AU از زاویهٔ A در مثلث ABC را به نقطهٔ Y، محل تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلع CA، وصل می‌کند خطی را که در نقطهٔ A بر CA عمود است در نقطهٔ F قطع می‌کند. ثابت کنید که $AF = h_a$.

۴۱) خطی که از یک رأس مثلث به نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی (دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن رأس) با ضلع مقابل آن رأس رسم می‌شود، مثلث را به دو مثلث تقسیم می‌کند. نشان دهید که دایره‌های محاطی داخلی (خارجی) این دو مثلث در همان نقطه بر این خط مماس‌اند.

۴۲) (الف) رابطهٔ زیر را، که با استفاده از نمادهای متداول نوشته شده است، ثابت کنید:

$$AX^2 + AX_a^2 + AX_b^2 + AX_c^2 = 3(b^2 + c^2) - a^2$$

(ب) نشان دهید که مجموع مربع فاصله‌های رأسهای یک مثلث از نقاط تماس ضلع مقابل هر کدام با چهار دایرهٔ سه مماس مثلث (دوازده فاصله) ۵ برابر مجموع مربع اضلاع مثلث است.

۴۳) نشان دهید که تصویر رأس B از مثلث ABC بر نیمساز داخلی زاویهٔ A روی خطی قرار دارد که نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی با اضلاع BC و AC را به هم وصل می‌کند. گزارهٔ متناظری را برای نیمسازهای خارجی بیان و آن را اثبات کنید.

۴۴) نشان دهید که وسط یک ضلع مثلث، پای ارتفاع وارد بر این ضلع، و تصاویر دو انتهای این ضلع بر روی نیمساز داخلی زاویهٔ مقابل، چهار نقطهٔ همدایره هستند. آیا این مطلب برای نیمساز خارجی صادق است؟

ارتفاعها

۴۵) می‌خواهیم خطی به موازات خط مفروض s رسم کنیم که از نقطهٔ دور از دسترس X، که نقطهٔ برخورد دو خط مفروض p و q است بگذرد. به این منظور خطی عمود بر خط s رسم می‌کنیم تا p و q را در A و B قطع کند. اگر H نقطهٔ برخورد عمودهایی باشد که از A بر q و از B بر p رسم شده‌اند، خطی که از H بر AB عمود می‌شود خط مطلوب است. درستی این ترسیم را نشان دهید.

۴۶) A' وسط قاعده، و E و F پای ارتفاعهای وارد بر دو ضلع جانبی یک مثلث متغیر، نقاط ثابتی هستند، و $A'E = A'F$. مکان هندسی رأسهای مثلث و مرکز ارتفاعی آن‌را بیابید.

۴۷) نشان دهید که نقطهٔ متقارن مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به یک رأس مثلث، و نقطه متقارن آن رأس نسبت به نقطهٔ وسط ضلع مقابل، با مرکز دایرهٔ محیطی مثلث همخط‌اند.

۴۸) مثلثی طوری تغییر می‌کند که همواره با خودش متشابه می‌ماند. مرکز ارتفاعی ثابت است و یک رأس روی خط ثابتی قرار دارد. ثابت کنید که دو رأس دیگر نیز روی دو خط راست ثابت قرار دارند.

۴۹) رأسهای مثلثی روی ارتفاعهای مثلث مفروضی قرار دارند. اگر از وسط اضلاع این مثلث عمودهایی بر اضلاع متناظر مثلث مفروض رسم کنیم، نشان دهید که این سه عمود همرس‌اند.

۵۰) اگر D' دومین نقطهٔ برخورد ارتفاع ADD' از مثلث ABC با دایرهٔ محیطی، به مرکز O، و P نقطهٔ برخورد BC با خطی که از D' بر AC عمود می‌شود باشند، نشان دهید که خطوط AP و AO با نیمساز زاویهٔ DAC زاویه‌های مساوی می‌سازند.

۵۱) مرکز ارتفاعی، وسط قاعده و راستای قاعدهٔ مثلث متغیری ثابت است. نشان دهید که دایرهٔ محیطی این مثلث از دو نقطهٔ ثابت می‌گذرد. مکان هندسی مرکز ثقل مثلث را بیابید.

۵۲) مثلثی را با مفروض بودن h_b، h_c، و t_a رسم کنید.

۵۳) نشان دهید مثلثی که رأسهای آن پای ارتفاع وارد بر قاعده و نقاط وسط ارتفاعهای وارد بر دو ضلع دیگر از یک مثلث مفروض هستند بامثلث مفروض متشابه است؛ و دایرهٔ محیطی این مثلث از مرکز ارتفاعی و وسط قاعدهٔ مثلث مفروض می‌گذرد.

۵۴) نشان دهید که زاویهٔ بین خطوط $C'E$ و $B'F$، مکمل A یا برابر $۳A$ است. حروف به کار رفته همان نمادهای متداولی هستند که در مثلث به کار می‌روند.

۵۵) اگر P و Q نقاط متقارن نقطهٔ L نسبت به اضلاع Ox و Oy از زاویه‌ای مفروض باشند، و $P' = (LQ, Ox)$، $Q' = (LP, Oy)$، نشان دهید که P، Q، P'، و Q' روی دایره‌ای قرار دارند که از O می‌گذرند.

۵۶) اضلاع مثلث پادمکمل مثلث ABC دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نقاط P، Q، و R قطع می‌کنند. نشان دهید که مساحت مثلث PQR چهار برابر مساحت مثلث پادک مثلث ABC است.

۵۷) B' و C' تصویرهای نقطهٔ متغیری از دایره‌ای به قطر BC بر روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC هستند. نشان دهید که مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث متغیر $AB'C'$ دایره‌ای است که قطر آن ضلع EF از مثلث پادک نسبت به رأس A است.

۵۸) نشان دهید که (الف) اگر یک مثلث حاده با مثلث پادک خود متشابه باشد، هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند؛ (ب) اگر مثلثی که زاویه‌ای منفرجه دارد با مثلث پادک خود متشابه باشد، زاویه‌های آن $\frac{۱۸۰^\circ}{۷}$، $\frac{۳۶۰^\circ}{۷}$ و $\frac{۷۲۰^\circ}{۷}$ هستند.

۵۹) نشان دهید در مثلث متغیری که قاعده و دایرهٔ محیطی ثابت دارد، پاره‌خط واصل بین پای ارتفاعهای وارد بر ضلع متغیر طول ثابتی دارد.

۶۰) دو دایرهٔ هم مرکز مفروض‌اند. A نقطه‌ای روی دایرهٔ بزرگتر است، و B و C نقاط برخورد دایرهٔ بزرگتر با مماس متغیر BC بر دایرهٔ کوچکترند. ثابت کنید که مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث متغیر ABC یک دایره است.

۶۱) از مرکز ارتفاعی مثلث ABC خطوطی موازی با اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم تا ضلع BC را به‌ترتیب در D و E قطع کنند. عمودهایی که در D و E بر BC رسم می‌شوند، AB و AC را در دو نقطهٔ D' و E' قطع می‌کنند. نشان دهید روبروی قطری B در دایرهٔ محیطی مثلث ABC، روبروی قطری C در دایرهٔ محیطی مثلث ABC، و نقاط D' و E' همخط‌اند.

۶۲) فرض کنید D و D' تصاویر A'، وسط ضلع BC، بر شعاعهای OB و OC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC، و E، E' و F، F' به ترتیب، نقاط متناظر نسبت به نقاط B' و C' باشند. ثابت کنید که

$$\sqrt{DD' : a} + \sqrt{EE' : b} + \sqrt{FF' : c} = (R + r) : R$$

دایرهٔ نه نقطه

۶۳) از وسط هر ضلع یک مثلث خطی موازی با نیمساز خارجی زاویهٔ روبروی آن ضلع رسم می‌کنیم. نشان دهید که دایرهٔ نه نقطهٔ مثلثی که از این سه خط تشکیل می‌شود همان دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث مفروض است.

۶۴) از مثلثی محل مرکز ارتفاعی، محل نقطه‌ای روی دایرهٔ نه نقطه، محل نقطهٔ وسط قاعده، و محل خط بی‌نهایتی که قاعده روی آن قرار دارد، مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

۶۵) خط واصل بین مرکز ارتفاعی مثلث ABC و وسط ضلع BC، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نقاط $A_۱$ و $A_۲$ قطع می‌کند. نشان دهید که مراکز ارتفاعی سه مثلث ABC، $A_۱BC$، و $A_۲BC$ رأسهای یک مثلث قائم‌الزاویه هستند.

۶۶) در مثلث متغیر ABC قاعدهٔ BC و A، زاویهٔ روبروی قاعده، ثابت‌اند. نشان دهید که (الف) خط $B'Q$ راستای ثابتی دارد؛ و (ب) دایرهٔ نه نقطه بر دایرهٔ ثابتی مماس است.

۶۷) نشان دهید که پای ارتفاع وارد بر یک ضلع مثلث، وسط پاره‌خطی روی قطر دایرهٔ محیطی که بین این ضلع و رأس مقابل آن‌است، و مرکز دایرهٔ نه نقطه، همخط‌اند.

۶۸) A، B، و C مرکزهای سه دایرهٔ برابر (A)، (B)، و (C) با نقطهٔ مشترک L، D دیگر نقطهٔ مشترک دایره‌های (B) و (C)، E دیگر نقطهٔ مشترک دایره‌های (C) و (A)، و F دیگر نقطهٔ مشترک دایره‌های (A) و (B) است. نشان دهید که دایرهٔ DEF با دایره‌های مفروض برابر است و مرکز این دایره بر مرکز ارتفاعی مثلث ABC منطبق است.

۶۹) نشان دهید خطوطی که از نقاط اویلر مثلث به موازات نیمسازهای داخلی متناظرشان رسم می‌شوند، همرس‌اند؛ و خطی که از نقطهٔ برخورد این سه خط به مرکز نه نقطهٔ مثلث رسم می‌شود، با خطی که از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مفروض به مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن رسم می‌شود موازی است. گزاره‌های مشابهی را با استفاده از نیمسازهای داخلی و خارجی بیان و آنها را ثابت کنید.

۷۰) نشان دهید که مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث IBC روی نیمساز داخلی زاویهٔ A' از مثلث $A'B'C'$، یعنی مثلث مکمل مثلث مفروض ABC قرار دارد. گزاره‌های مشابهی را در مورد مثلثهای I_aBC، I_bBC، و I_cBC بیان و آنها را ثابت کنید.

۷۱) اگر O و H به ترتیب مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشند، نشان دهید که دایره‌های نه‌نقطهٔ سه مثلث OHA، OHB، و OHC دو نقطهٔ مشترک دارند.

۷۲) اگر A'، B'، و C' به ترتیب وسط اضلاع BC، CA، و AB از مثلث ABC باشند، نشان دهید که مراکز نه نقطهٔ مثلثهای $AB'C'$، $BC'A'$، و $CA'B'$ مثلثی متجانس با ABC، با نسبت تجانس ۱ : ۲، را تشکیل می‌دهند؛ ویژگیهای دیگر این شکل را بیابید.

تمرینهای گوناگون

۷۳) نشان دهید که خطوط اویلر سه مثلثی که از یک مثلث مفروض، توسط اضلاع مثلث پادک آن، جدا می‌شوند یک نقطهٔ مشترک دارند و این نقطه روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث مفروض قرار دارد.

۷۴) مثلث (S) در مثلث (T) محاط شده است و دو مثلث متشابه‌اند. نشان دهید که مرکز ارتفاعی مثلث (S) بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث (T) منطبق است.

۷۵) ضلع BC از مثلث ABC قطر دایرهٔ (BC) است و این دایره اضلاع CA و AB را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. دایره‌های (BC) و (AEF) روی هر خطی که از E (یا F) می‌گذرد یک وتر مضاعف جدا می‌کنند. نشان دهید که وسط این وتر روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد.

۷۶) نشان دهید که نقاط متقارن پای ارتفاع وارد بر قاعدهٔ یک مثلث نسبت به دو ضلع دیگر، روی ضلع متناظر با قاعده در مثلث پادک آن مثلث قرار دارند.

۷۷) در صفحهٔ یک مثلث دو راستا به دست آورید، به طوری که اگر از هر رأس مثلث دو خط به ترتیب، موازی با این دو راستا رسم شوند تا ضلع مقابل را در دو نقطه قطع کنند، شش نقطهٔ همدایره به‌دست آید.

۷۸) نشان دهید که نقطهٔ وسط یک ارتفاع مثلث، نقطهٔ تماس ضلع متناظر باآن ارتفاع و دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع، و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث همخط‌اند.

۷۹) نشان دهید خطی که از O، مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث و I، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن مثلث می‌گذرد، از H'، مرکز ارتفاعی مثلثی که رأسهای آن نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی با اضلاع مثلث است، نیز می‌گذرد. همچنین نشان دهید که $H'I : OI = r : R$. آیا این مطلب برای مراکز دایره‌های محاطی خارجی نیز صادق است؟

۸۰) X' نقطهٔ متقارن نقطهٔ تماس ضلع BC از مثلث ABC با دایرهٔ محاطی داخلی، نسبت به نیمساز داخلی زاویهٔ A و A' وسط ضلع BC است. نشان دهید که خط $A'X'$ و دو خط مشابه آن، $B'Y'$ و $C'Z'$، یک نقطهٔ مشترک دارند. آیا این مطلب برای یک دایرهٔ محاطی خارجی نیز صادق است.

۸۱) خط AD که از رأس A می‌گذرد دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در D قطع می‌کند. اگر U و V به‌ترتیب مراکز ارتفاعی مثلثهای ABD و ACD باشند، ثابت کنید که UV با BC موازی و مساوی است.

۸۲) نیمسازهای داخلی زاویه‌های B و C از مثلث ABC خط AX_a، واصل بین A و نقطهٔ تماس BC با دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به این ضلع، را به‌ترتیب در نقاط L و M قطع می‌کنند. ثابت کنید که $AL : AM = AB : AC$.

۸۳) طول نیمساز داخلی یک زاویهٔ مثلث و راستاهای هر سه نیمساز این مثلث مفروض است. مثلث را رسم کنید.

مسائلی مشابه، مشتمل بر نیمسازهای خارجی، یا هم نیمسازهای داخلی و هم نیمسازهای خارجی را بررسی کنید.

۸۴) نشان دهید که حاصل‌ضرب فاصله‌های مرکز دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث از سه رأس مثلث برابر $۴Rr^۲$ است. فرمولهای مشابهی را برای مراکز دایره‌های محاطی خارجی بیان و اثبات کنید.

۸۵) AA'، BB'، و CC' میانه‌های مثلث ABC و G و H مرکز ثقل و مرکز ارتفاعی آن هستند. روی $A'A$ نقطهٔ U را طوری می‌گیریم که $A'A \cdot A'U = A'B^۲ = A'C^۲$. نقاط V و W را به طور مشابه نسبت به BB' و CC' در نظر می‌گیریم. نشان دهید که اضلاع مثلث UVW بامیانه‌های مثلث ABC متناسب‌اند، و GH قطری از دایرهٔ محیطی آن‌است.

۸۶) خطی که به موازات میانهٔ AA' از مثلث ABC رسم می‌شود، اضلاع BC، CA، و AB را در نقاط H، N، و D قطع می‌کند. ثابت کنید که نقاط متقارن H نسبت به نقاط وسط NC و BD، نسبت به رأس A متقارن‌اند.

۸۷) قاطع متغیری اضلاع AB و AC از مثلث ABC را در نقاط $P_۱$ و $Q_۱$ قطع می‌کند. فرض کنید $O_۱$ مرکز دایرهٔ محیطی $AP_۱Q_۱$، و $O_۲$ مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی باشد که رأسهای آن A و نقاط همنوای $P_۱$ و $Q_۱$ هستند. نشان دهید که خط $O_۱O_۲$ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد و دومین نقطهٔ مشترک دو دایره‌ای که در نظر گرفته شد، روی دایرهٔ ثابتی قرار دارد.

۸۸) اگر X، Y، و Z نقاط تماس اضلاع BC، CA، و AB از مثلث ABC با دایرهٔ محاطی داخلی باشند، و خطوط AX، BY، و CZ دایرهٔ محاطی داخلی را در نقاط X'، Y'، و Z' هم قطع کنند، نشان دهید که

$$AX \cdot XX' \cdot BC = BY \cdot YY' \cdot CA = CZ \cdot ZZ' \cdot AB = ۴rS$$

که در آن r و S به ترتیب، شعاع داخلی و مساحت مثلث ABC هستند. روابطی متناظر را برای دایره‌های محاطی خارجی بیان و آنها را اثبات کنید.

۸۹) عمودهای DP و DQ که از پای ارتفاع AD از مثلث ABC به ترتیب، بر اضلاع AB و AC رسم می‌شوند، عمودهای BP و CQ را که در B و C بر BC رسم شده‌اند، به ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که خط PQ از H، مرکز ارتفاعی ABC می‌گذرد.

۹۰) از رأسهای یک مثلث مفروض متقارنهای اضلاع متناظر مثلث پادمکمل نسبت به یک راستای مفروض رسم شده‌اند. نشان دهید سه خطی که به این ترتیب به دست می‌آیند روی نقطه‌ای از دایرهٔ محیطی مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند. این گزاره را نسبت به مثلث میانک و دایرهٔ نه نقطه بیان کنید.

۹۱) ارتفاعهای AHD، BHE، و CHF از مثلث ABC را به ترتیب از طرف D، E، و F تا نقاط P، Q، و R امتداد داده‌ایم و $DP = AH$، $EQ = BH$، و $FR = CH$. خطوطی که از P، Q، و R به

موازات ضلعهای BC، CA، و AB رسم می‌شوند مثلث $A_1B_1C_1$ را تشکیل می‌دهند. نشان دهید که (الف) H مرکز ثقل مثلث $A_1B_1C_1$ است؛ (ب) مرکز تجانس مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ مرکز دایرهٔ محیطی هر یک از این مثلثهاست.

۹۲) نقاط H و O به ترتیب، مرکز ارتفاعی و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و نقاط P و P' دو نقطهٔ متقارن نسبت به عمودمنصف BC هستند. عمودی که از P بر BC رسم می‌شود، BC را در P_1 و OP' را در P'' قطع می‌کند؛ M وسط HP است. ثابت کنید که(الف) $2MP_1 = AP''$؛ (ب) متقارن P_1 نسبت به وسط OM روی AP' قرار دارد.

۹۳) ضلع AB از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را تا E امتداد می‌دهیم به‌طوری که $BE = AD$. خطی که در E بر ABE عمود می‌شود، خطی را که از C بر قطر BD عمود می‌شود در F قطع می‌کند. نشان دهید که AF نیمساز زاویهٔ A است.

۹۴) اگر AD و BE ارتفاعهای مثلث ABC باشند، و BL عمودی باشد که از B بر DF رسم می‌شود، نشان دهید که اگر $LB^2 = LD \cdot LE$، مثلث متساوی‌الساقین است.

۹۵) نقطهٔ S مرکز تجانس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ است، و A''، B''، و C'' نقاط متقارن A'، B'، و C' نسبت به عمودمنصفهای BC، CA، و AB هستند. خطوط AA''، BB''، و CC'' خطوطی را که از S به موازات BC، CA، و AB رسم می‌شوند به ترتیب در A_1، B_1، و C_1 قطع می‌کنند. نشان دهید دایرهٔ $A_1B_1C_1$ از S می‌گذرد و مرکز آن روی خط اویلر مثلث ABC قرار دارد.

۹۶) h، m، و t به ترتیب، ارتفاع، میانه، و نیمساز داخلی رسم شده از یک رأس مثلثی هستند که شعاع دایرهٔ محیطی آن R است. نشان دهید که

$$4R^2h^2(t^2 - h^2) = t^4(m^2 - h^2)$$

۹۷) عمودهای BB' و CC' که از رأسهای B و C از مثلث ABC بر قطر دلخواه d از (I)، دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC رسم می‌شوند، خطوط XY و YZ را در نقاط B'' و C'' قطع می‌کنند؛ X، Y، و Z نقاط تماس (I) با اضلاع BC، CA، و AB هستند. ثابت کنید که (الف) $BB' : BB'' = CC' : CC''$؛ (ب) خطوط d و $B''C''$ روی BC یکدیگر را قطع می‌کنند؛ (ج) خط $B''C''$ از مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به ضلع BC می‌گذرد.

۹۸) از مثلثی قاعده، زاویهٔ مقابل قاعده، و مجموع مربع فاصله‌های رأس این زاویه از وسط دو پاره‌خطی که توسط پای ارتفاع رسم شده از همین رأس روی قاعده جدا می‌شود، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۹۹) از مثلثی قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده مفروض‌اند. این مثلث را طوری رسم کنید که قطر دایرهٔ محاطی داخلی آن با ضلع مربعی که در این مثلث محاط می‌شود و دو رأس آن روی قاعده است، برابر باشد.

۱۰۰) از مثلثی محل پای ارتفاع، محل پای میانهٔ وارد بر قاعده، و محل مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن (D، A'، I) مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۰۱) از مثلثی محیط، زاویهٔ رأس و طول خطی که از رأس این زاویه رسم می‌شود و قاعده را به نسبت مفروضی تقسیم می‌کند، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۰۲) از مثلثی زاویهٔ رأس، یک ضلع مجاور این زاویه و نسبت مساحت آن به مساحت مثلثی که نیمسازهای زاویهٔ مفروض و ضلع مقابل آن زاویه می‌سازند، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۰۳) مثلث ABC را که AD، BE، و CF ارتفاعهای آن هستند با مفروض بودن حاصل‌ضربهای $BC \cdot CD$، $CA \cdot AE$، و $AB \cdot BF$ رسم کنید.

۱۰۴) مثلث ABC را با مفروض بودن h_a، t_a، و $b + c$ رسم کنید.

۱۰۵) فرض کنید A'، B'، C' و A''، B''، C'' به ترتیب، نقاط برخورد نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن مثلث باشند. مثلث ABC را با مفروض بودن پاره‌خطهای (الف) $A''B$، $B''C$، و $C''A$؛ (ب) $A''B$، $B'C$، و $C'A$ رسم کنید.

۱۰۶) در یک دایرهٔ مفروض مثلث قائم‌الزاویه‌ای محاط کنید که شعاع دایرهٔ محاطی آن مفروض است به طوری که یک ضلع زاویهٔ قائمه‌اش از نقطهٔ مفروضی بگذرد.

۱۰۷) از شش نقطهٔ برخورد نیمسازهای داخلی یک مثلث با دایرهٔ محاطی داخلی آن، سه نقطه مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۰۸) از مثلث ABC ارتفاع AD و نسبتهای $AE : EC$ و $AF : FB$، که E و F پای دو ارتفاع دیگر مثلث هستند مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۰۹) از مثلثی محل دو نقطهٔ اویلر و محل مرکز ثقل مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۱۰) از مثلثی قاعده، میانهٔ وارد بر قاعده، و تفاضل دو ضلع دیگر مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۱۱) یک رأس مثلث متغیری که در دایرهٔ ثابتی محاط است، ثابت است و ضلع مقابل آن رأس از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. (الف) نشان دهید که مرکز ارتفاعی یک دایره را می‌پیماید. (ب) نشان دهید که دایرهٔ نه نقطه بر دو دایرهٔ ثابت هم مرکز مماس است.

۱۱۲) مماسی که از نقطهٔ متغیر M بر دایرهٔ (O) رسم می‌شود، قطر ثابت AA' را در نقطهٔ T قطع می‌کند. نشان دهید که مکان هندسی مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث OMT از چهار خط راست تشکیل می‌شود. مکان هندسی مراکز دایره‌های محاطی خارجی را به دست آورید.

۱۱۳) دایرهٔ محیطی و راستاهای دو ضلع یک مثلث متغیر ثابت است. مکان هندسی مراکز سه مماس این مثلث را بیابید.

۱۱۴) خط متغیری که از رأس مثلث مفروضی می‌گذرد آن مثلث را به دو مثلث تقسیم می‌کند. این خط یک مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ محاطی داخلی آن دو مثلث است. نشان دهید که مماس مشترک داخلی دوم این دو دایره از نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث مفروض با ضلع مقابل رأس مذکور می‌گذرد. خاصیت مشابهی را برای دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به رأس مذکور بیان و آن‌را ثابت کنید.

۱۱۵) شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و دو ضلع از مثلثی مفروض‌اند. نشان دهید که این مثلث را نمی‌توان تنها با خط‌کش و پرگار رسم کرد.

۱۱۶) (الف) نشان دهید خطوطی که از وسط اضلاع مثلث (T) مماس بر دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث رسم می‌شوند، مثلثی متجانس با مثلث پادک مثلث (T) می‌سازند. (ب) نشان دهید که مرکز تجانس این دو مثلث روی خط اویلر مثلث (T) قرار دارد.

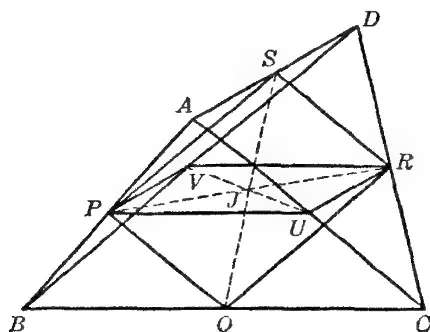
۴

چهارضلعیها

الف. چهارضلعی در حالت کلی

۲۴۰. قضیه. نقاط وسط اضلاع هر چهارضلعی، رأسهای یک متوازی‌الاضلاع هستند.

پاره‌خط PS ، واصل بین P وسط ضلع AB و S وسط ضلع AD از چهارضلعی $ABCD$ (شکل ۷۴) و پاره‌خط QR، واصل بین Q وسط ضلع CB و R وسط ضلع CD، هردو با قطر BD از متوازی‌الاضلاع موازی و برابر نصف آن هستند؛ پس قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۷۴

۲۴۱. نتیجه. (الف) محیط متوازی‌الاضلاع $PQRS$ برابر مجموع قطرهای چهارضلعی مفروض است (شکل ۷۴).(ب) مساحت متوازی‌الاضلاع نصف مساحت چهارضلعی مفروض است.

اثبات را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

متوازی‌الاضلاع در چه صورت مستطیل می‌شود؟ در چه صورت لوزی می‌شود؟ در چه صورت مربع می‌شود؟

۲۴۲. قضیه. خطوطی که وسط اضلاع روبروی یک چهارضلعی را به‌هم وصل می‌کنند و خطی که وسط قطرهای چهارضلعی را به‌هم وصل می‌کند همرس‌اند و نقطهٔ مشترکشان نقطهٔ وسط هرکدام است.

خطوط PR و QS (شکل ۷۴) همدیگر را در نقطه‌ای مانند J نصف می‌کنند، زیرا قطرهای متوازی‌الاضلاع $PQRS$ هستند (§۲۴۰).

اگر U و V به‌ترتیب، وسط قطرهای AC و BD باشند، $PURV$ نیز متوازی‌الاضلاع است، زیرا PV و RU هردو با AD موازی و نصف آن هستند؛ پس قطر UV از متوازی‌الاضلاع $PURV$ نیز در نقطهٔ J توسط قطر PR نصف می‌شود.

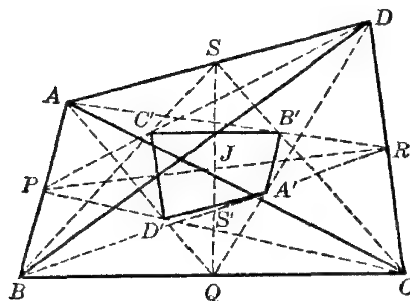
۲۴۳. تعریف. نقطهٔ J(§۲۴۲) را مرکز ثقل چهارضلعی $ABCD$ می‌نامند.

۲۴۴. قضیه. چهارخطی که از وصل کردن هر رأس یک چهارضلعی به مرکز ثقل مثلثی که سه رأس دیگر چهارضلعی رأسهای آن هستند حاصل می‌شوند، همرس‌اند.

فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی مفروض (شکل ۷۵) و A'، B'، C'، و D' به‌ترتیب مرکز ثقل مثلثهای BCD، CDA، DAB، و ABC باشند. داریم (§۸۸)

$$PC' : PD = PD' : PC = ۱ : ۳$$

پس $C'D'$ با CD موازی است و $C'D' : CD = ۱ : ۳$.



شکل۷۵

پس، اضلاع چهارضلعی $A'B'C'D'$ با اضلاع متناظر چهارضلعی $ABCD$ موازی و متناسب‌اند؛ پس دو چهارضلعی متجانس‌اند و خطوط AA'، BB'، CC' و DD' یکدیگر را در مرکز تجانس دو شکل قطع می‌کنند.

۲۴۵. ملاحظه. (الف) مرکز تجانس دو چهار ضلعی (§۲۴۴) بر J، یعنی مرکز ثقل چهارضلعی $ABCD$ منطبق است.

میانهٔ QS از مثلث QAD (شکل ۷۵) پاره‌خط $D'A'$ را که با قاعدهٔ DA موازی است در S' قطع می‌کند؛ پس، S و S' نقاط متناظر در دو شکل متجانس هستند، و خط $SS'Q$ از مرکز تجانس دو چهارضلعی می‌گذرد. برای خط PR هم رابطهٔ مشابهی صادق است و به‌این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

(ب) همان‌طور که به‌آسانی از شکل دیده می‌شود، جهتهای خطوط $A'D'$ و AD عکس هم هستند؛ پس دو چهارضلعی تجانس معکوس دارند و نقاط متناظر، مثل A و A'، در دو طرف نقطهٔ J قرار دارند، و $JA : JA' = -۳ : ۱$.

۲۴۶. قضیه. مجموع مربع اضلاع چهارضلعی برابر است با مجموع مربع قطرهای آن و چهاربرابر مربع پاره‌خطی که وسط قطرهای آن‌را به‌هم وصل می‌کند.

در مثلثهای ABD، CBD، و VAC (شکل ۷۴) داریم (§۱۰۶)

$$۲AV^۲ = AB^۲ + AD^۲ - \frac{۱}{۲}BD^۲$$

$$۲CV^۲ = BC^۲ + CD^۲ - \frac{۱}{۲}BD^۲$$
$$۲UV^۲ = AV^۲ + CV^۲ - \frac{۱}{۲}AC^۲$$

با ضرب کردن رابطهٔ آخر در ۲ و افزودن آن به مجموع دو رابطهٔ اول، پس از ساده‌کردن به‌دست می‌آوریم

$$۴UV^۲ = AB^۲ + AD^۲ + BC^۲ + CD^۲ - AC^۲ - BD^۲$$

۲۴۷. نتیجه. مجموع مربع اضلاع متوازی‌الاضلاع برابر است با مجموع مربع قطرهای آن.

۲۴۸. قضیه. مجموع مربع قطرهای چهارضلعی دوبرابر مجموع مربع دو خطی است که وسط اضلاع مقابل چهارضلعی را به‌هم وصل می‌کنند.

خطهای PR و QS (شکل ۷۴) قطرهای متوازی‌الاضلاع $PQRS$ هستند (§۲۴۰)، و اندازهٔ هر ضلع این متوازی‌الاضلاع نصف قطر متناظر در چهار ضلعی $ABCD$ است؛ به‌این ترتیب قضیه ثابت می‌شود (§۲۴۷).

۲۴۹. مسئله. یک چهارضلعی را با مفروض بودن چهار ضلع و یکی از دو خطی که وسط دو ضلع روبرو را به‌هم وصل می‌کنند، رسم کنید.

اضلاع چهارضلعی $ABCD$ (شکل ۷۴) و خط PR مفروض‌اند؛ پس متوازی‌الاضلاع $PURV$ را می‌توان رسم کرد، زیرا قطر PR و اضلاع آن معلوم‌اند:

$$PU = RV = \frac{۱}{۲}BC\ , \qquad PV = RU = \frac{۱}{۲}AD$$

اکنون قطر UV از متوازی‌الاضلاع $QUSV$ معلوم است و می‌توان آن‌را به‌طور مشابه رسم کرد.

اکنون P، Q، R، و S، یعنی نقاط وسط اضلاع چهارضلعی مشخص است، پس می‌توان مثلثهای SPA، PQB، ⋯ را کامل کرد، و به‌این ترتیب ترسیم چهار ضلعی $ABCD$ کامل می‌شود.

۲۵۰. مسئله. از یک چهارضلعی دو زاویهٔ روبرو، دو قطر، و زاویهٔ بین قطرها مفروض‌اند؛ چهارضلعی را رسم کنید.

دو کمان رسم‌کنید که قطر مفروض AC از چهارضلعی مطلوب $ABCD$ وتر آنها باشد، و از نقاط روی آنها AC با زاویه‌های مفروض B و D دیده شود. قطر دیگر هم از لحاظ اندازه و هم از لحاظ راستا معلوم است؛ اکنون مسئله با قراردادن این قطر به‌طوری که دو انتهای آن روی دو دایرهٔ رسم شده قرارگیرد حل می‌شود، و روش این کار قبلاً بیان شده است (§۸).

۲۵۱. قضیه. نیمسازهای داخلی زاویه‌های چهارضلعی یک چهارضلعی محاطی می‌سازند.

فرض کنید که نیمسازهای داخلی زاویه‌های A و D از چهارضلعی $ABCD$ یکدیگر را در P، و نیمسازهای زاویه‌های B و C یکدیگر را در Q قطع کنند. داریم

$$\angle APD = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(A+D)\ , \qquad \angle BQC = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(B+C)$$

پس،

$$\angle APD + \angle BQC = ۳۶۰^\circ - \frac{۱}{۲}(A+B+C+D) = ۳۶۰^\circ - ۱۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

به‌عنوان تمرین، گزارهٔ مشابهی را برای نیمسازهای خارجی بیان و آن‌را ثابت کنید.

تمرین

۱) نشان دهید که زاویهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور چهارضلعی برابر است با نصف مجموع دو زاویهٔ دیگر چهارضلعی. گزارهٔ مشابهی را برای نیمسازهای خارجی بیان و آن‌را ثابت کنید.

۲) $ABCD$ یک چهارضلعی، P، Q، R، و S به‌ترتیب وسط اضلاع AB، BC، CD، و DA، U و V وسط قطرهای آن و O یک نقطهٔ دلخواه است. OP، OQ، OR، OS، OU و OV به‌ترتیب در نقاط P'، Q'، R'، S'، U'، V'، به‌نسبت یکسان تقسیم می‌شوند. ثابت کنید که $P'R'$، $Q'S'$ و $U'V'$ همرس‌اند.

۳) چهارضلعی $ABCD$ مفروض است، نشان دهید مکان هندسی نقطهٔ M، که به‌ازای آن ،

$$\text{مساحت } MAB + \text{مساحت } MCD = \text{مساحت } MAC + \text{مساحت } MBD$$

خطی است که از وسط قطرها می‌گذرد.

۴) از یک چهارضلعی طول اضلاع و طول پاره‌خطی که وسط قطرهای آن‌را به‌هم وصل می‌کند مفروض‌اند. چهارضلعی را رسم کنید.

ب. چهارضلعی محاطی

۲۵۲. تعریف. هر چهارضلعی که رئوس آن روی یک دایره قرار داشته باشند چهارضلعی محاطی یا محاط شدنی نامیده می‌شود.

۲۵۳. قضیه. در هر چهارضلعی محاطی (الف) زاویه‌های مقابل مکمل‌اند و برعکس؛ (ب) زاویهٔ بین یک ضلع و یک قطر برابر است با زاویهٔ بین ضلع مقابل و قطر دیگر، و برعکس.

۲۵۴. قضیه. خطی که وسط دوکمانی را که دو ضلع مقابل از چهارضلعی روی دایرهٔ محیطی چهارضلعی جدا می‌کنند به‌هم وصل می‌کند، بر خطی که وسط دو کمان مربوط به دو ضلع دیگر را به‌هم وصل می‌کند عمود است.

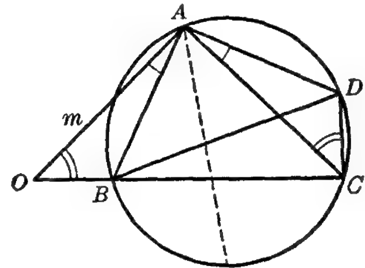
فرض کنید E، F، G، و H به‌ترتیب وسط کمانهایی باشند که اضلاع AB، BC، CD، و DA از چهارضلعی محاطی $ABCD$ روی دایرهٔ محیطی جدا می‌کنند، و M محل برخورد قطرهای AC و BD باشد. نقطهٔ E، وسط آن کمان AB است که C و D روی آن قرار ندارند، و به‌همین ترتیب در مورد نقاط F، G و H.

زاویهٔ AMD نصف مجموع کمانهای AD و BC است. خط HF قطر BD را در نقطه‌ای داخل دایره، مانند S، قطع می‌کند؛ پس زاویهٔ HSD نصف مجموع کمانهای HD و BF است. و بنابراین، نصف زاویهٔ AMD است، یعنی خط FH با نیمساز داخلی زاویهٔ AMD موازی است.

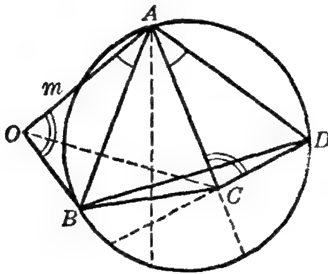
به‌همین‌ترتیب، خط EG با نیمساز داخلی زاویهٔ AMB موازی است، و قضیه ثابت می‌شود.

۲۵۵. قضیهٔ بطلمیوس. در چهارضلعی‌محاطی حاصل‌ضرب قطرها برابر است با مجموع حاصل‌ضربهای اضلاع روبرو، و برعکس.

چهارضلعی $ABCD$ (شکلهای ۷۶ الف و ب) را در نظر بگیرید که در آن $AB = a$، $BC = b$، $CD = c$، $DA = d$، $AC = x$ و $BD = y$، و فرض کنید خط m متقارن ضلع AD نسبت به‌نیمساز زاویهٔ BAC باشد. روی m یک و تنها یک نقطهٔ O وجود دارد به‌طوری‌که $\angle AOB = \angle ACD$. با توجه به مثلثهای ACD و AOB داریم $\angle ABO = \angle ADC$. پس اگر $ABCD$ محاطی باشد، نقطهٔ O روی ضلع BC قرار دارد و تنها در همین حالت است که O روی BC قرار می‌گیرد، زیرا اگر O روی BC باشد به‌آسانی می‌توان



شکل ۷۶ (الف)



شکل ۷۶ (ب)

نشان داد که $ABCD$ محاطی است (شکل ۷۶ الف).

مثلثهای AOB و ACD متشابه‌اند، چه O روی BC باشد و چه O روی BC نباشد؛ پس،

$$AO : AC = AB : AD = OB : CD \qquad (۱)$$

گذشته از این، مثلثهای OAC و BAD متشابه‌اند، زیرا $\angle BAD = \angle OAC$، و اضلاع آنها بنابر رابطهٔ (۱) متناسب‌اند؛ پس،

$$OC : BD = AC : AD \qquad (۲)$$

اگر $ABCD$ محاطی باشد، داریم (شکل ۷۶ الف)

$$OC = OB + BC$$

$BC = b$ و با توجه به (۱) و (۲) داریم

$$OB = ac : d\,, \qquad OC = xy : d$$

پس با جایگزین کردن این روابط و ساده کردن آنها به‌دست می‌آوریم

$$xy = ac + bd \qquad (۳)$$

و به‌این ترتیب، حکم مستقیم قضیه ثابت می‌شود.

اگر $ABCD$ محاطی نباشد، داریم (شکل ۷۶ ب)

$$OC < OB + BC$$

و با همان جایگذاریهای بالا به‌دست می‌آوریم

$$xy < ac + bd$$

یعنی در چهارضلعی غیرمحاطی حاصل‌ضرب قطرها از مجموع حاصل‌ضربهای اضلاع روبرو کوچکتر است.

این گزاره همراه با قضیهٔ مستقیم که قبلاً ثابت شد، عکس قضیه را ثابت می‌کند: اگر حاصل‌ضرب قطرهای یک چهارضلعی با مجموع حاصل‌ضربهای اضلاع روبروی آن برابر باشد، چهارضلعی محاطی است.

۲۵۶. مسئله. اضلاع a، b، c، و d از یک چهارضلعی محاطی مفروض‌اند. این چهارضلعی را رسم کنید.

اثبات قضیهٔ قبل روش زیر را برای ترسیم پیش پایمان می‌گذارد.

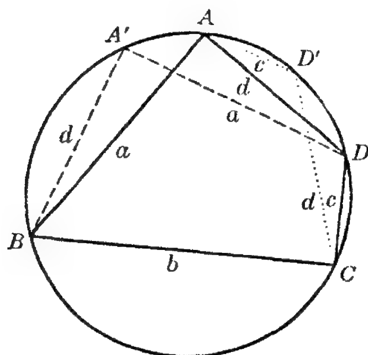
فرض کنید b و d دو ضلع مقابل باشند؛ روی یک خط راست $CB = b$ و $BO = ac : d$ را جدا کنید

(شکل ۷۶ الف). دایرهٔ (B,a) یک مکان هندسی برای رأس A است. با توجه به رابطهٔ (۱)(§۲۵۵) داریم $AO = ax : d$؛ بنابراین،

$$AO : AC = (ax : d) : x = a : d$$

که یک دایرهٔ آپولونیوسی را به‌عنوان مکان هندسی دوم A به‌دست می‌دهد. مثلث ACD را اکنون به‌آسانی می‌توان رسم کرد و $ABCD$ چهارضلعی مطلوب است. نقطهٔ D را باید طوری گرفت که B و D در دو طرف AC قرار گیرند.

دو دایره‌ای که نقطهٔ A را تعیین می‌کنند در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، و این دو نقطه نسبت به BC متقارن‌اند. هریک از این نقاط را می‌توان به عنوان رأس A برگزید، ولی دو جواب نسبت به BC متقارن‌اند؛ بنابراین، مسئله اساساً تنها یک جواب دارد.



شکل ۷۷

۲۵۷. ملاحظه. (الف) فرض کردیم که ضلع d روبروی ضلع b است. اگر ضلع a یا c را ضلع مقابل b فرض کنیم، دو چهارضلعی دیگر به‌دست می‌آوریم. ولی با رسم چهارضلعی اول، یعنی $ABCD$ چهارضلعیهای $A'BCD$ و $ABCD'$ متناظر با دو حالت دیگر را به‌آسانی می‌توان رسم کرد (شکل ۷۷)، این چهارضلعیها پاسخ کامل مسئله را به‌دست می‌دهند، زیرا در هر حالت مسئله تنها یک جواب دارد (§۲۵۶).

(ب) چون کمانهای BAD' و CDA' بنابر روش ترسیم فوق برابرند (شکل ۷۷)، داریم

$$BD' = CA' = z$$

و سه چهارضلعی $ABCD$، $ABCD'$ و $A'BCD$ تنها سه قطر متفاوت x، y و z دارند.

با اعمال قضیهٔ بطلمیوس به چهارضلعیهای $ABCD'$، و $A'BCD$ داریم

$$xz = ad + bc\ , \qquad yz = ab + cd$$

پس،

$$x : y = (ad + bc) : (ab + cd)$$

خواننده می‌تواند این رابطه را با کلمات بیان کند.

با ترکیب این رابطه و رابطهٔ (۳)(§۲۵۵) یک رابطه برای x و یک رابطه برای y به‌دست می‌آید.

(ج) مثلث BCD (شکل ۷۷) بخش مشترک چهارضلعیهای $ABCD$ و $A'BCD$ است و اضلاع متناظر دو مثلث ABD و $A'BD$ بایکدیگر برابرند؛ پس دو متوازی‌الاضلاع هم‌ارزند.

به‌طور مشابه، چهارضلعیهای $DABC$ و $D'ABC$ نیز هم‌ارزند. پس سه چهارضلعی $ABCD$، $A'BCD$، و $ABCD'$ هم‌ارزند.

(د) فرض کنید R و S شعاع دایرهٔ محیطی مشترک و مساحت مشترک چهارضلعیهای $ABCD$، $A'BCD$، و $ABCD'$ باشند؛ داریم (§۲۵۵)

$$xy = ac + bd$$

پس،

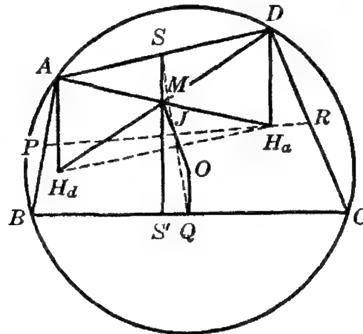
$$xyz = acz + bdz = ۴R(A'CD \text{ مساحت} + A'CB \text{ مساحت})(§۸۶)$$

یا

$$xyz = ۴RS$$

۲۵۸. قضیه. عمودهایی که از وسط هر ضلع چهارضلعی محاطی بر ضلع مقابل رسم می‌شوند، همرس‌اند.

فرض کنید O و J به‌ترتیب مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ثقل (§۲۴۳) چهارضلعی محاطی $ABCD$، و P، Q، R، و S به‌ترتیب نقاط وسط اضلاع AB، BC، CD، و DA باشند (شکل ۷۸).



شکل۷۸

فرض کنید عمود SS' که از S بر BC رسم می‌شود خط OJ را در M قطع کند. خطوط SS' و OQ موازی‌اند، و J خط QS را نصف می‌کند؛ پس J وسط OM است. پس SS' از M، نقطهٔ متقارن O، مرکز دایرهٔ محیطی، نسبت به J، مرکز ثقل چهارضلعی، می‌گذرد؛ یعنی SS' از نقطه‌ای می‌گذرد که به انتخاب اولیهٔ این عمود بستگی ندارد. پس قضیه ثابت می‌شود.

۲۵۹. ملاحظه. عمودی که از وسط هر قطر بر قطر دیگر رسم می‌شود نیز از نقطهٔ M می‌گذرد، زیرا مرکز ثقل J وسط خطی که وسط دو قطر را به‌هم وصل می‌کند نیز هست (§۲۴۲).

۲۶۰. تعریف. متقارن مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی نسبت به مرکز ثقل، پاد مرکز چهارضلعی محاطی نامیده می‌شود.

۲۶۱. قضیه. چهار خطی که از هر رأس چهارضلعی محاطی به‌مرکز ارتفاعی مثلثی که سه رأس دیگر چهارضلعی رأسهای آن هستند رسم می‌شوند، از وسط هم می‌گذرند.

فرض کنید H_d و H_a به‌ترتیب مرکز ارتفاعی مثلثهای ABC و DBC (شکل ۷۸) باشند. داریم (§۱۹۵)

$$AH_d = ۲OQ = DH_a$$

خطوط AH_d و DH_a هردو بر BC عمودند؛ پس ADH_aH_d متوازی‌الاضلاع است و قطرهای AH_a و DH_d از وسط یکدیگر می‌گذرند.

به‌طور مشابه، DH_d از وسط خطوط BH_b و CH_c می‌گذرد و این خطوط نیز از وسط DH_d می‌گذرند، پس قضیه ثابت می‌شود.

پس نقطهٔ مشترک این چهار خط، یعنی X، مرکز تقارن دو چهارضلعی $H_aH_bH_cH_d$ و $ABCD$ است.

۲۶۲. ملاحظه. نقطهٔ X(۲۶۱§) بر پادمرکز چهارضلعی، یعنی M، منطبق است.

درواقع، در مثلث DAH_d خط SX با AH_d موازی، و بنابراین، بر BC عمود است؛ پس SX از M می‌گذرد (۲۵۸§). برای PX، QX، و RX نیز وضعیت همین‌طور است و گزارهٔ فوق ثابت می‌شود.

پس نقطهٔ M مرکز تقارن دو چهارضلعی $ABCD$ و $H_aH_bH_cH_d$ است.

۲۶۳. قضیه. دایره‌های نه نقطهٔ چهار مثلثی که رأسهایشان رأسهای یک چهارضلعی محاطی هستند، از پادمرکز چهارضلعی می‌گذرند.

نقطهٔ D روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد (شکل ۷۸)؛ پس M، نقطهٔ وسط پاره‌خطی که D را به H_d، مرکز ارتفاعی ABC(۲۶۱§)، وصل می‌کند، روی دایرهٔ نه نقطهٔ ABC قرار دارد (۲۱۰§). همین مطلب درمورد مثلثهای دیگر گروه نیز صادق است.

۲۶۴. قضیه. مجموع مربع فاصله‌های پادمرکز چهارضلعی محاطی از چهار رأس آن برابر است با مربع قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی.

در مثلث MAD (شکل ۷۸) داریم (۱۰۶§)

$$MA^{۲} + MD^{۲} = ۲MS^{۲} + \frac{۱}{۲}AD^{۲} \qquad (۱)$$

$MS = OQ$، زیرا این دو، اضلاع مقابل یک متوازی‌الاضلاع هستند؛ پس با در نظرگرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ OQB و نشان دادن شعاع دایرهٔ محیطی $ABCD$ با R، معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$MA^{۲} + MD^{۲} = ۲R^{۲} + \frac{۱}{۲}AD^{۲} - \frac{۱}{۲}BC^{۲}$$

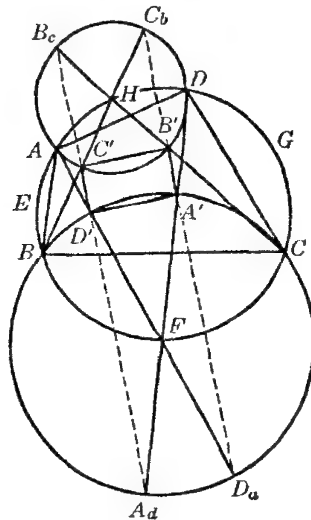
اضلاع AB، BC و CD از چهارضلعی $ABCD$ سه رابطهٔ دیگر متناظر با رابطهٔ بالا به‌دست می‌دهند و با جمع کردن این چهار رابطه نتیجهٔ بیان شده به‌آسانی حاصل می‌شود.

۲۶۵. قضیه. مراکز دایره‌های محاطی داخلی چهار مثلثی که رأسهایشان رأسهای یک چهارضلعی محاطی هستند، یک مستطیل تشکیل می‌دهند.

فرض کنید E، F، G، و H وسط کمانهای AB، BC، CD، و DA از دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی $ABCD$ باشند (شکل ۷۹).

D' و A' مراکز دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABC و DBC، به‌ترتیب روی AF و DF، یعنی نیمسازهای زاویه‌های BAC و BDC، و همچنین روی دایرهٔ (F, FB) قرار دارند (۱۱۶§ ، ۱۲۲§)؛ پس مثلث $FA'D'$ متساوی‌الساقین، و قاعدهٔ $A'D'$ بر FH، نیمساز زاویهٔ F، عمود است. به‌طور مشابه، خط FH بر خط $B'C'$ عمود است، که B' و C' به‌ترتیب مرکز دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای CAD و BAD هستند.

به‌طور مشابه، خط EG بر خطوط $A'B'$ و $C'D'$ عمود است. خطوط FH و EG برهم عمودند. (۲۵۴§)؛ و قضیه ثابت می‌شود.



شکل۷۹

۲۶۶. قضیه. اگر از چهارمثلثی که توسط چهار رأس چهارضلعی محاطی تعیین می‌شوند، سه مثلث را که رأس مشترکی دارند در نظر بگیریم، سه مرکز دایره‌های محاطی خارجی نسبت به این رأس در این سه مثلث، سه رأس مستطیلی هستند که رأس چهارمش مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث چهارم است.

فرض کنید D_a، D_b، D_c؛ A_b، A_c، A_d؛ B_a، B_c، B_d؛ و C_a، C_b، C_d به‌ترتیب مراکز دایره‌های محاطی خارجی مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB باشند، به‌طوری‌که A_b مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به رأس B از مثلث BCD باشد و ... (شکل ۷۹).

دو نقطهٔ D' و D_a دو سر قطری از دایرهٔ (F, FB) و دو نقطهٔ A' و A_d دو سر قطر دیگری از این دایره هستند (§۱۲۲)؛ پس $D'A'D_aA_d$ یک مستطیل است، و در نتیجه A_d و D_a به‌ترتیب روی خطوط $C'D'$ و $B'A'$ قرار دارند (§۲۶۵). با در نظرگرفتن دایرهٔ (H, HA) می‌توانیم نشان دهیم که نقاط B_c و C_b به‌ترتیب روی خطوط $D'C'$ و $A'B'$ قرار دارند. پس دو مجموعهٔ چهارتایی از نقاط همخط داریم که عبارت‌اند از $A'B'C_bD_a$ و $C'D'A_dB_c$.

با در نظرگرفتن دایره‌های (E, EA) و (G, GC) دو نقطهٔ دیگر برروی هریک از خطوط $A'D'$ و $B'C'$ به‌دست می‌آوریم.

با در نظرگرفتن ملاحظات مشابه، نتیجهٔ بیان شده به‌دست می‌آید.

۲۶۷. قضیه. شانزده مرکز سه مماس چهار مثلثی که توسط چهار رأس چهارضلعی محاطی تعیین می‌شوند، چهارتا چهارتا روی هشت خط قرار دارند. این هشت خط از دو گروه چهارتایی تشکیل می‌شوند، به‌طوری که خطوط هر گروه باهم موازی‌اند و بر خطوط گروه دیگر عمودند.

این جمعبندی گزاره‌های قبلی (§۲۶۵ و §۲۶۶) است.

تمرین

۱) نشان دهید که در هر چهارضلعی محاطی فواصل نقطهٔ برخورد قطرها از دو ضلع روبرو با این اضلاع متناسب‌اند.

۲) در چهارضلعی محاطی $ABCD$ عمودی که در A بر BA رسم می‌شود، CD را در A' قطع می‌کند، و عمودی که در C بر CD رسم می‌شود، AB را در C' قطع می‌کند، نشان دهید که خط $A'C'$ با قطر BD موازی است.

۳) در یک دایرهٔ مفروض یک چهارضلعی محاط کنید که قطرها و زاویهٔ بین آنها از آن مفروض باشند.

۴) نشان دهید که اگر از نقطهٔ برخورد امتداد دو ضلع روبروی هم در یک چهارضلعی محاطی عمودی بر خطی که وسط آن دو ضلع را به‌هم وصل می‌کند، رسم کنیم این خط از پاد مرکز چهارضلعی می‌گذرد.

۵) نشان دهید که پاد مرکز چهارضلعی محاطی مرکز ارتفاعی مثلثی است که رأسهای آن نقاط وسط قطرهای چهارضلعی و نقطهٔ برخورد قطرها هستند.

۶) نشان دهید که پاد مرکز چهارضلعی محاطی با متقارنهای مرکز دایرهٔ محیطی نسبت به دو ضلع روبروی هم، همخط است.

۷) اگر H_a، H_b، H_c، و H_d مراکز ارتفاعی چهار مثلثی باشند که توسط رأسهای یک چهارضلعی محاطی $ABCD$ تعیین می‌شوند، نشان دهید که رأسهای $ABCD$ مراکز ارتفاعی چهار مثلثی هستند که توسط نقاط H_a، H_b، H_c و H_d تعیین می‌شوند.

۸) نشان دهید که حاصل‌ضرب فاصله‌های دو ضلع مقابل در چهارضلعی محاطی از نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی برابر است با حاصل‌ضرب فاصله‌های دو ضلع دیگر از آن نقطه.

۹) نشان دهید چهار خطی که هرکدام از یک رأس چهارضلعی محاطی به مرکز نه نقطهٔ مثلثی رسم می‌شود که سه رأس دیگر چهارضلعی رأسهای آن هستند، همرس‌اند.

۱۰) نشان دهید که مراکز نه‌نقطهٔ چهار مثلثی که چهار رأس چهارضلعی محاطی تعیین می‌کنند، یک چهار ضلعی محاطی تشکیل می‌دهند.

۱۱) سه رأس از چهارضلعی محاطی متغیری ثابت‌اند. مکان هندسی (الف) مرکز ثقل چهارضلعی؛ (ب) پاد مرکز چهارضلعی، را به‌دست آورید.

۱۲) اگر a، b، c، و d چهارضلع و S مساحت یک چهارضلعی محاطی باشد، نشان دهید که

$$S^۲ = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

که در آن $p = \frac{۱}{۲}(a+b+c+d)$ [رابطهٔ برهماگوپتا]

ج. چهارضلعیهای دیگر

۲۶۸. تعریف. چهارضلعی را محیطی می‌نامند اگر چهار ضلع آن بر یک دایره مماس باشند.

۲۶۹. قضیه. در چهارضلعی محیطی مجموع دو ضلع روبرو با مجموع دو ضلع روبروی دیگر برابر است.

اگر p، q، r، و s طول مماسهایی باشند که از رأسهای چهارضلعی بر دایرهٔ محاطی آن رسم می‌شوند، به‌آسانی می‌توان دید که مجموع هر دو ضلع روبروی هم $p+q+r+s$ است.

۲۷۰. قضیهٔ عکس. اگر مجموع دو ضلع مقابل از یک چهارضلعی با مجموع دو ضلع دیگر آن برابر باشد، آن چهارضلعی محیطی است.

فرض کنید در چهارضلعی مفروض $ABCD$ (شکل ۸۰) داشته باشیم

$$AB + CD = AD + BC \qquad (۱)$$

اگر دو ضلع مجاور از $ABCD$ برابر باشند، دو ضلع دیگر هم مطابق رابطهٔ (۱) برابر خواهند بود، و

اثبات قضیه کار پیش‌پاافتاده‌ای خواهد شد.

اگر AB از BC بزرگتر باشد، بنابر رابطهٔ (۱) داریم

$$AB - BC = AD - CD \tag{۲}$$

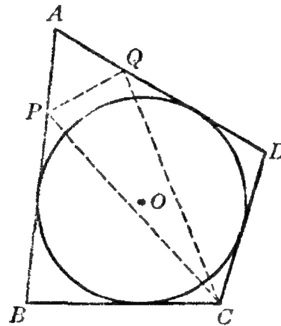
نقطهٔ P را بین A و B و نقطهٔ Q را بین A و D چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم

$$BP = BC, \qquad DQ = DC$$

پس، بنابر رابطهٔ (۲)،

$$AP = AQ$$

پس سه مثلث متساوی‌الساقین APQ، BCP و DCQ داریم، و نیمسازهای داخلی زاویه‌های A، B، و D عمود منصفهای اضلاع مثلث PQC هستند، و بنابراین، یکدیگر را در O، مرکز دایرهٔ محیطی PQC قطع می‌کنند.



شکل ۸۰

نقطهٔ O که نقطهٔ مشترک نیمسازهای زاویه‌های A، B، و D از چهارضلعی $ABCD$ است، لزوماً داخل $ABCD$ قرار دارد و به‌علاوه، ازاضلاع $ABCD$ همفاصله است؛ بنابراین قضیه اثبات می‌شود.

۲۷۱. تعریف. اگر قطرهای یک چهارضلعی برهم عمود باشند، آن چهارضلعی را عمود قطر می‌نامیم.

۲۷۲. قضیه. در چهارضلعی عمود قطر مجموع مربع دو ضلع روبرو با مجموع مربع دو ضلع دیگر برابر است و برعکس.

اگر قطرهای AC و BD از چهارضلعی $ABCD$ برهم عمود باشند، و نقطهٔ برخوردشان را O بنامیم داریم

$$AB^۲ + CD^۲ = AO^۲ + BO^۲ + CO^۲ + DO^۲$$

$$AD^۲ + BC^۲ = AO^۲ + DO^۲ + BO^۲ + CO^۲$$

پس،

$$AB^۲ + CD^۲ = AD^۲ + BC^۲ \tag{۱}$$

برعکس، اگر معادلهٔ (۱) برقرار باشد، داریم

$$AB^۲ - AD^۲ = BC^۲ - CD^۲$$

پس خطی که نقاط A و C را به‌هم وصل می‌کند بر خط BD عمود است (§۱۱، مکان هندسی ۱۲).

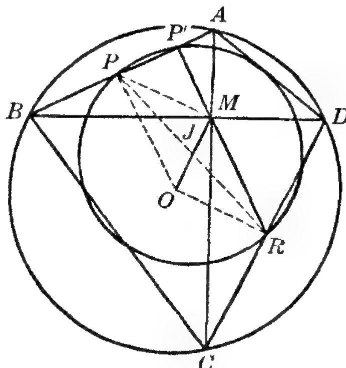
۲۷۳. قضیه. در چهارضلعی عمود قطر دو خطی که وسط اضلاع روبرو را به‌هم وصل می‌کنند، برابرند.

در واقع، در این حالت متوازی‌الاضلاعی که رأسهای آن وسط اضلاع چهارضلعی هستند (§۲۴۰) مستطیل است، و دو خط مذکور در قضیه قطرهای این مستطیل هستند.

۲۷۴. نتیجه. در چهارضلعی عمود قطر نقاط وسط اضلاع روی دایره‌ای قرار دارند که مرکزش مرکز ثقل چهارضلعی است (§۲۴۲، §۲۴۳).

۲۷۵. قضیه. اگر یک چهارضلعی عمود قطر، محاطی باشد، پاد مرکز آن بر نقطهٔ برخورد قطرهایش منطبق است.

اگر O و J به‌ترتیب مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ثقل چهارضلعی محاطی $ABCD$ باشند (شکل ۸۱)، و قطرهای AC و BD برهم عمود باشند، H_d، مرکز ارتفاعی مثلث ABC روی BD که بر قاعدهٔ AC عمود است قرار دارد؛ خط DH_d از پاد مرکز چهار ضلعی، یعنی نقطهٔ M، می‌گذرد (§۲۶۱، §۲۶۲)؛ پس M روی قطر BH_dD قرار دارد.



شکل۸۱

به‌طور مشابه، M باید روی قطر AC قرار داشته باشد؛ بنابراین قضیه ثابت می‌شود.

۲۷۶. قضیهٔ برهماگوپتا. در یک چهارضلعی که‌هم عمود قطر و هم محاطی باشد، خطی که از محل برخورد دو قطر بر یک ضلع عمود می‌شود، از وسط ضلع مقابل می‌گذرد.

در واقع، عمود RP' که از R وسط ضلع CD (شکل ۸۱) بر ضلع مقابل، یعنی AB رسم می‌شود، از نقطهٔ M می‌گذرد (§۲۵۸، §۲۷۵).

۲۷۷. نتیجه. در چهارضلعی محاطی عمود قطر تصاویر نقطهٔ برخورد دو قطر بر روی چهار ضلع، روی دایره‌ای قرار دارند که از وسط اضلاع می‌گذرد.

در واقع اگر P (شکل ۸۱) وسط ضلع AB باشد، قطر PR از دایرهٔ مذکور (§۲۷۳) از نقطهٔ P' با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. برای بقیهٔ تصاویر نقطهٔ M هم وضعیت به‌همین صورت است.

۲۷۸. قضیه. در چهارضلعی محاطی عمود قطر فاصلهٔ هر ضلع از مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی، با نصف طول ضلع مقابل برابر است.

اگر P و R وسط اضلاع روبروی هم AB و CD باشند، خط OM (شکل ۸۱) خط PR را در نقطهٔ J، مرکز ثقل چهارضلعی، نصف می‌کند (§۲۴۲)؛ پس $PMRO$ متوازی‌الاضلاع است و $OP = MR$. ولی OP بر وتر AB عمود است، و میانهٔ MR در مثلث قائم‌الزاویهٔ CMD برابر نصف وتر CD از این مثلث است؛ پس قضیه ثابت شده است.

۲۷۹. قضیه. اگر یک چهارضلعی هم محاطی و هم عمود قطر باشد، مجموع مربع دو ضلع روبرو با مربع قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی برابر است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOP (شکل ۸۱) داریم

$$OA^۲ = AP^۲ + OP^۲ = \frac{۱}{۴}AB^۲ + \frac{۱}{۴}CD^۲ (§۲۷۸)$$

۲۸۰. نتیجهٔ ۱. در متوازی‌الاضلاع $PMRO$ (شکل ۸۱) داریم (§۲۴۵)

$$PR^۲ + OM^۲ = OP^۲ + PM^۲ + MR^۲ + RO^۲ = ۲(OP^۲ + OR^۲)$$

پس بنابر قضیهٔ بالا (§۲۷۹)،

$$PR^۲ = \frac{۱}{۲}(AB^۲ + CD^۲) - OM^۲ = ۲OA^۲ - OM^۲$$

این معادله قطر دایره‌ای را که قبلاً در نظر گرفتیم (§۲۷۷) به‌دست می‌دهد، و نشان می‌دهد که این دایره تنها به شعاع دایرهٔ مفروض و نقطهٔ برخورد قطرها بستگی دارد.

۲۸۱. نتیجهٔ ۲. در یک چهارضلعی محاطی و عمود قطر مجموع مربع اضلاع هشت برابر مربع شعاع دایرهٔ محیطی است.

تمرین

۱) نشان دهید طول پاره‌خطی که وسط قطرهای چهارضلعی محاطی عمود قطر را به‌هم وصل می‌کند با فاصلهٔ نقطهٔ برخورد قطرها از مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی برابر است.

۲) اگر قطرهای چهارضلعی محاطی $ABCD$ برهم عمود باشند، و E روبروی قطری D در دایرهٔ محیطی چهارضلعی باشد، نشان دهید که $AE = CB$.

تمرینهای تکمیلی

۱) یک چهارضلعی را با مفروض بودن چهارضلع و مجموع دو زاویهٔ مقابل رسم کنید.

۲) از یک چهارضلعی محل تصاویر نقطهٔ برخورد قطرها بر چهار ضلع، مفروض است؛ چهارضلعی را رسم کنید.

۳) حول یک چهارضلعی مفروض یک لوزی محیط کنید که با لوزی مفروضی متشابه باشد.

۴) مستطیلی متشابه با یک مستطیل مفروض رسم کنید که اضلاعش به‌ترتیب بر چهار دایرهٔ مفروض مماس باشند.

۵) قاعدهٔ BC و A، زاویهٔ روبروی قاعده، از مثلث متغیر ABC ثابت‌اند. روی نیمساز داخلی زاویهٔ A پاره‌خط AL را برابر $\frac{۱}{۲}(AB + AC)$ جدا می‌کنیم. نشان دهید که مکان هندسی نقطهٔ L یک دایره است.

۶) نشان دهید که مربع مساحت یک چهارضلعی دومرکزی (یعنی یک چهارضلعی که هم محیطی باشد و هم محاطی) با حاصل‌ضرب چهار ضلع آن برابر است.

۵

خط سیمسون

۲۸۲. قضیه. (الف) پاهای سه عمودی که از نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی یک مثلث بر سه ضلع مثلث رسم می‌شوند همخط‌اند. (ب) برعکس، اگر پاهای سه عمودی که از یک نقطه بر سه ضلع یک مثلث رسم می‌شوند همخط باشند، آن نقطه روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد.

فرض کنید P نقطه‌ای داخل زاویهٔ ABC از مثلث ABC باشد و L، M، و N تصاویر نقطهٔ P به ترتیب بر اضلاع BC، CA و AB باشند (شکل ۸۲). دایره‌های (PA) و (PC) که PA و PC قطر آنها هستند به‌ترتیب از نقاط M و N، و M و L می‌گذرند، و داریم

$$\angle APN = \angle AMN, \angle CPL = \angle CML, \angle B + \angle NPL = ۱۸۰^\circ \qquad (۱)$$

حال فرض کنید که P روی دایرهٔ ABC قرار داشته باشد. در این صورت، $\angle APC$ مکمل زاویهٔ B است و داریم

$$\angle APC = \angle NPL \qquad (۲)$$

با کم کردن این دو زاویهٔ مساوی از زاویه $\angle NPC$ خواهیم داشت

$$\angle APN = \angle CPL \qquad (۳)$$

با توجه به (۱)،

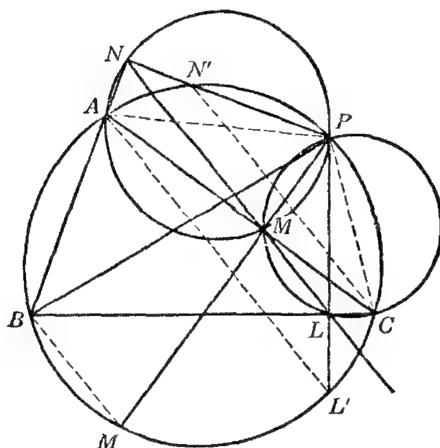
$$\angle AMN = \angle CML \qquad (۴)$$

پس سه نقطهٔ L، M، و N همخط‌اند.

برعکس، اگر L، M، و N همخط باشند، (۴) برقرار است، و از (۴) و (۱) معادلهٔ (۳)، و در نتیجه (۲) را به‌دست می‌آوریم، یعنی $\angle NPL$ مکمل زاویهٔ B است و P با نقاط A، B، و C همدایره است.

نکته. نقطهٔ P چه آن‌طور که فرض کردیم داخل زاویهٔ B باشد، و چه داخل هریک از دو زاویهٔ دیگر مثلث ABC باشد، اثبات حکم مستقیم قضیه معتبر خواهد بود. اثبات عکس قضیه نیز در این حالتها معتبر است. ولی در مورد عکس قضیه، اگر فرض شود که P داخل زاویهٔ متقابل به رأس یکی از زاویه‌های مثلث ABC است، واضح است که نقاط L، M و N نمی‌توانند همخط باشند.

می‌توان ملاحظه کرد که خط LMN دایرهٔ محیطی را قطع می‌کند، زیرا از نقطهٔ M که داخل دایرهٔ محیطی است می‌گذرد.



شکل۸۲

۲۸۳. تعریف. خط LMN(۲۸۲§) را خط سیمسون، یا به‌اختصار سیمسون، نقطهٔ P نسبت به‌مثلث ABC یا برای مثلث ABC می‌نامند؛ گاهی LMN را خط پادک نقطهٔ P می‌نامند.

خط LMN را گاهی با نماد $P(ABC)$ نشان می‌دهند.

نقطهٔ P را قطب خط LMN برای مثلث ABC می‌نامند.

۲۸۴. قضیه. اگر هر یک از سه وتری را که از یک نقطهٔ روی دایره می‌گذرند قطر دایره‌ای دیگر در نظر بگیریم، این سه دایره یکدیگر را دوبه‌دو در سه نقطهٔ جدید قطع می‌کنند و این سه نقطه همخط‌اند.

در واقع اگر PA، PB و PC (شکل ۸۲) سه وتر یک دایره باشند، سه دایره‌ای که به قطر این وترها رسم می‌شوند از پای عمودهایی که از P بر خطوط BC، CA، و AB رسم می‌شوند می‌گذرند، و این سه نقطه همخط‌اند (۲۸۲§ الف).

۲۸۵. قضیهٔ عکس. اگر سه دایره‌ای که قطرهایشان سه پاره‌خط PA، PB، و PC هستند یکدیگر را دوبه‌دو در سه‌نقطهٔ همخط قطع کنند، نقطهٔ P با نقاط A، B، و C همدایره خواهد بود.

در واقع، این دایره‌ها دوبه‌دو از پای عمودهایی که از P بر خطوط BC، CA و AB رسم می‌شوند می‌گذرند، و اگر این سه نقطه همخط باشند، چهار نقطهٔ P، A، B، و C همدایره‌اند (۲۸۲§ ب).

۲۸۶. قضیه. اگر سه دایره از یک نقطهٔ واقع بر دایرهٔ محیطی مثلثی که رأسهایش مراکز این سه دایره است بگذرند، یکدیگر را دوبه‌دو در سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند.

فرض کنید A، B، و C مراکز سه دایرهٔ مفروض باشند، و P نقطهٔ مشترک این سه دایره باشد که روی دایرهٔ (ABC) قرار دارد. دایره‌های (A')، (B')، و (C') به‌ترتیب به قطر PA، PB، و PC، یکدیگر را در سه نقطهٔ همخط D'، E'، و F' قطع می‌کنند (۲۸۴§)، و نقاط D، E، و F، یعنی نقاط تلاقی دوبه‌دوی دایره‌های مفروض، در تجانس $(P,۲)$ به‌ترتیب با نقاط D'، E' و F' متناظرند، پس اینها هم همخط‌اند.

۲۸۷. قضیهٔ عکس. اگر سه دایره که از یک نقطه می‌گذرند، یکدیگر را دوبه‌دو در سه نقطهٔ همخط قطع کنند، نقطهٔ مشترکشان با مراکزشان همدایره است.

اگر نقاط D، E، و F همخط باشند، نقاط متناظرشان در تجانس $(P,۲)$، یعنی نقاط D'، E'، و F'

نیز همخط‌اند؛ پس P روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد (۲۸۵§).

۲۸۸. قضیه. اگر عمودهایی که از یک نقطهٔ P روی دایرهٔ (O) که دایرهٔ محیطی مثلث ABC است، بر اضلاع BC، CA، و AB رسم می‌شوند، دایرهٔ (O) را مجدداً به‌ترتیب در نقاط L'، M'، و N' قطع کنند، سه خط AL'، BM' و CN' با خط سیمسون P برای ABC موازی خواهند بود.

درواقع، داریم (شکل ۸۲)

$$\angle L'AC = \angle L'PC = \angle LPC = \angle LMC$$

پس AL' با NLM موازی است.

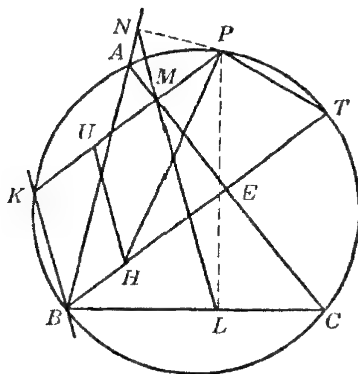
برای BM' و CN' نیز مطلب مشابهی صادق است.

۲۸۹. مسئله. نقطه‌ای را بیابید که خط سیمسون آن نسبت به یک مثلث مفروض، در راستای مفروضی باشد.

از یک رأس دلخواه مثلث مفروض ABC، مثلاً رأس B، خطی در راستای مفروض رسم کنید، تا دایرهٔ محیطی (O) را مجدداً در K قطع کند (شکل ۸۳). عمود KM که از K بر ضلع روبروی رأس B، یعنی AC، رسم می‌شود دایرهٔ (O) را در نقطهٔ مطلوب P قطع می‌کند و خطی که از M به موازات KB رسم می‌شود خط سیمسون P است (۲۸۸§).

۲۹۰. قضیه. خط سیمسون از وسط خطی که قطب آن‌را به مرکز ارتفاعی مثلث وصل می‌کند، می‌گذرد.

فرض کنید ارتفاع BE (شکل ۸۳) (O) را مجدداً در T قطع کند. و خطی که از H، مرکز ارتفاعی ABC، به‌موازات BK رسم می‌شود خط PMK را در U قطع کند.



شکل۸۳

با توجه به متوازی‌الاضلاع $BHUK$ و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $PTBK$، داریم

$$HU = BK\,, \qquad PT = BK$$

پس $HUPT$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. E وسط HT است (۱۷۸§)؛ پس EA، عمودمنصف قاعدهٔ HT از ذوزنقهٔ $HUPT$، قاعدهٔ دیگر، یعنی UP را در M قطع می‌کند. پس خط سیمسون LMN از M، وسط ضلع PU از مثلث PUH می‌گذرد و با UH موازی است؛ پس LMN از وسط ضلع سوم این مثلث، یعنی HP، هم می‌گذرد.

۲۹۱. ملاحظه. وسط پاره خط HP روی دایرهٔ نه نقطهٔ ABC، دایرهٔ (N)، قرار دارد. (۲۱۰§).

۲۹۲. مسئلهٔ دولاهیر. از مثلثی یک زاویه، مجموع دو ضلع این زاویه و ارتفاع وارد بر ضلع سوم، $(A, b + c = 2s, h_a)$، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

فرض کنید ABC (شکل ۸۴) مثلث مطلوب، W و P به‌ترتیب نقاط برخورد AW، نیمساز داخلی زاویهٔ A، با BC و دایرهٔ محیطی ABC، و R و S تصویر P به‌ترتیب بر AB و AC باشند. داریم

$$AR + AS = (AB + BR) + (AC - SC) = (AB + AC) + (BR - SC) \qquad (۱)$$

ولی $PB = PC$ (§۱۲۲) و $PR = PS$؛ پس با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ همنهشت PAR و PAS، و مثلثهای قائم‌الزاویهٔ همنهشت PRB و PSC، داریم $AR = AS$ و $BR = CS$. پس با توجه به رابطهٔ (۱)،

$$AR = AS = \frac{1}{2}(AB + AC) = s$$

پس، از چهارضلعی $ASPR$ زاویهٔ SAR را که برابر زاویهٔ A است، و دو ضلع AR و AS را می‌دانیم؛ و زاویه‌های ARP و ASP قائمه‌اند؛ پس می‌توان این چهار ضلعی را رسم کرد، و AP عمودمنصف RS است.

شکل۸۴

خط RS خط سیمسون P برای ABC است؛ پس RS از M، پای عمود PM که از P بر BC رسم می‌شود، می‌گذرد. فرض کنید T نقطهٔ برخورد RS و AWP باشد. با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابه PMT و ADW داریم

$$PT : AD = PM : AW = PM : (AP - PW) \qquad (۲)$$

و در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ PMW و APS داریم

$$PM^2 = PT.PW , \qquad PS^2 = PT \cdot PA \qquad (۳)$$

پس با توجه به رابطه‌های (۲) و (۳)،

$$PM^2 + AD \cdot PM - PS^2 = 0 \qquad (۴)$$

پاره‌خط $AD = h_a$ مفروض است، و PS را می‌توان از چهارضلعی $ASPR$ که در بالا رسم شد، به‌دست آورد؛ پس PM را می‌توان رسم کرد (§۶۷).

دایرهٔ (P, PM) را رسم کنید تا RS را در M قطع کند. عمودی که در M بر PM رسم می‌شود دو ضلع AR و AS از چهار ضلعی $ASPR$ را در دو رأس B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

اگر ارتفاع h_a از پاره‌خط $AT = s\sin\frac{1}{2}A$ بزرگتر باشد، مسئله جواب ندارد. اگر AD کوچکتر از AT باشد، ترسیم بالا منجر به دو جواب متقارن نسبت به AP می‌شود. اگر h_a با AT برابر باشد، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

تمرین

۱) روبروی قطری یکی از رأسهای مثلثی را در دایرهٔ محیطی مثلث در نظر بگیرید. نشان دهید که خط سیمسون این نقطه نسبت به این مثلث، ضلعی از مثلث است که روبروی رأس در نظرگرفته شده است.

۲) نشان دهید که خط سیمسون دومین نقطهٔ برخورد یک ارتفاع مثلث با دایرهٔ محیطی مثلث، از پای ارتفاع می‌گذرد، و پاد موازی ضلع متناظر با آن ارتفاع، نسبت به دو ضلع دیگر مثلث است.

۳) آیا نقطه‌ای وجود دارد که روی خط سیمسون خودش نسبت به‌مثلث مفروضی قرار داشته باشد؟

۴) اگر خط سیمسون $P(ABC)$ ضلع BC را در L و ارتفاع AD را در K قطع کند، نشان دهید درصورتی که H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، خط PK با LH موازی است.

۵) اگر خط سیمسون $P(ABC)$ با شعاع OA از دایرهٔ محیطی موازی باشد، نشان دهید که خط PA با BC موازی‌است.

۶) از نقطهٔ P روی دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC عمودهایی بر اضلاع مثلث رسم می‌کنیم تا (O) را مجدداً به ترتیب در نقاط A'، B' و C' قطع کنند، نشان دهید که دو مثلث ABC و $A'B'C'$ همنهشت‌اند و نسبت به یک محور متقارن‌اند.

۷) اگر L، M ، و N پای عمودهایی باشند که از نقطهٔ P روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC به‌ترتیب بر اضلاع BC، CA، و AB رسم می‌شوند، ثابت کنید که (الف) مثلثهای PLN و PAC متشابه‌اند؛ (ب) $PL\cdot MN$، $PM\cdot NL$، و $PN\cdot LM$ با BC، CA و AB متناسب‌اند؛ (ج) $PA\cdot PL = PB\cdot PM = PC\cdot PN$.

۸) در دایره‌ای مفروض مثلثی محاط کنید به‌طوری‌که خط سیمسون نقطه‌ای مفروض از دایره نسبت به این مثلث، بر خط مفروضی منطبق باشد. یک رأس را می‌توان به‌دلخواه برگزید.

۹) مثلثی را با مفروض بودن A، $b-c$، h_a رسم کنید.

۱۰) فرض کنید P، Q، و R نقاط برخورد نیمسازهای داخلی مثلث ABC با دایرهٔ محیطی (O) باشند. نشان دهید که خطوط سیمسون P، Q، و R نسبت به ABC، نیمسازهای خارجی مثلث میانک (T') از مثلث ABC هستند. اگر P'، Q' و R' نقاط برخورد نیمسازهای خارجی مثلث ABC با دایرهٔ محیطی (O) باشند، خطوط سیمسون این نقاط را نسبت به مثلث ABC بیابید. همین مسئله را در مورد نقاط تلاقی هر سه نیمساز همرسی از مثلث ABC، یا هر سه نیمسازی که یک مثلث تشکیل می‌دهند، با دایرهٔ محیطی (O) حل کنید.

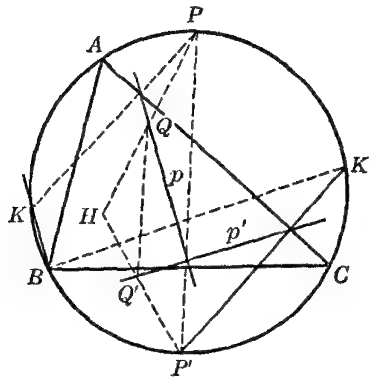
۱۱) نشان دهید که نقاط متقارن نقطه‌ای از دایرهٔ محیطی مثلث، نسبت به اضلاع مثلث، روی خطی قرار دارند که از مرکز ارتفاعی مثلث می‌گذرد.

۱۲) اگر خط سیمسون نقطهٔ P از روبروی قطری P در دایرهٔ محیطی مثلث بگذرد، نشان دهید که این خط سیمسون از مرکز ثقل مثلث هم می‌گذرد.

۲۹۳. قضیه. زاویهٔ بین خطوط سیمسون دو نقطه نسبت به یک مثلث، نصف اندازهٔ کمان بین آن دو نقطه است.

فرض کنید P و P' نقاط مفروض (شکل ۸۵) و K و K' نقاط برخورد عمودهای وارد از P و P' بر

ضلع AC، با دایرهٔ محیطی ABC باشند. خطوط سیمسون P و P' با خطوط BK و BK' موازی‌اند؛ پس زاویهٔ بین خطوط سیمسون برابر زاویهٔ KBK' است. چون اندازهٔ زاویهٔ محاطی KBK' نصف کمان KK' است و $\widehat{KK'} = \widehat{PP'}$، قضیه ثابت شده است.



شکل۸۵

۲۹۴. نتیجه. خطوطی که از نقاط P و P' به‌ترتیب بر خطوط سیمسون $P'(ABC)$ و $P(ABC)$ عمود می‌شوند (یا به ترتیب به‌موازات این دو خط رسم می‌شوند) یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قطع می‌کنند.

۲۹۵. قضیه. خطوط سیمسون دو انتهای هر قطر برهم عمودند و یکدیگر را روی دایرهٔ نه نقطه مثلث قطع می‌کنند.

اگر نقاط P و P' (شکل ۸۵) دو انتهای یک قطر باشند، زاویهٔ بین خطوط سیمسون آنها، p و p'، یک چهارم محیط دایره است (§۲۹۳).

Q وسط پاره‌خط HP و Q' وسط پاره‌خط HP'، در تجانس $(H, \frac{1}{2})$ به‌ترتیب با نقاط P و P' متناظرند؛ پس خط QQ' در این تجانس با خط PP' متناظر است؛ بنابراین QQ' قطری از دایرهٔ نه نقطهٔ (N) از مثلث ABC است (§۲۱۰). دو خط سیمسون متعامد p و p' به‌ترتیب از نقاط Q و Q' می‌گذرند (§۲۹۰)، پس یکدیگر را روی دایرهٔ (N) قطع می‌کنند.

۲۹۶. ملاحظه. دو خط سیمسون متعامد، هر ضلع مثلث را در دو نقطهٔ همنوا قطع می‌کنند.

زیرا این دو نقطه تصاویر دو انتهای یک قطر دایرهٔ محیطی مثلث بر ضلع در نظر گرفته شده هستند.

۲۹۷. نتیجه. دایرهٔ نه نقطهٔ یک مثلث، مکان هندسی نقاط تلاقی خطوط سیمسون متناظر با نقاط دو سر قطرهای دایرهٔ محیطی مثلث با این دایره است.

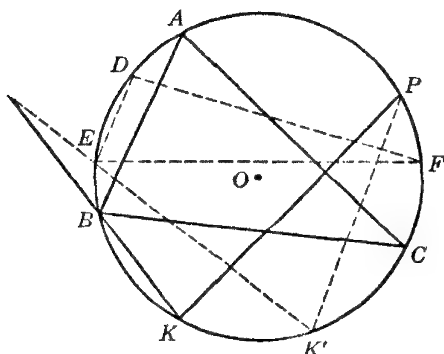
۲۹۸. قضیه. هر نقطه‌ای از یک دایره را در نظر بگیریم، زاویهٔ بین خطوط سیمسون آن نقطه نسبت به دو مثلث محاط شده در آن دایره، مقدار ثابتی خواهد بود.

فرض کنید ABC و DEF دو مثلث محاط شده در دایرهٔ (O) باشند (شکل ۸۶)، و عمودهایی که از نقطه دلخواه P روی (O) بر AC و DF رسم می‌شوند، (O) را مجدداً در K و K' قطع کنند. خطوط سیمسون نقطهٔ P نسبت به ABC و DEF، یعنی خطهای p و p'، به‌ترتیب با خطوط BK و EK' موازی‌اند

(§۲۸۸). زاویهٔ بین BK و EK' عبارت است از

$$\frac{1}{2}(\widehat{KK'} - \widehat{BE}) = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{CF} - \widehat{BE}) \qquad (1)$$

چون این عبارت به P بستگی ندارد، قضیه ثابت شده است.



شکل۸۶

نکته. در شکل در نظر گرفته شده خطوط BK و EK' خارج از دایرهٔ (O) و خطوط AC و DF درون دایرهٔ (O) یکدیگر را قطع می‌کنند. ولی می‌توان نشان داد که اگر مکان هریک از این نقاط برخورد، یا هردوی آنها، تغییر کند، بازهم قضیه معتبر است.

۲۹۹. قضیه. چهار دایرهٔ محیطی چهار مثلثی که توسط ترکیبهای سه به‌سه از چهار خط راست مفروض تعیین می‌شوند، یک نقطهٔ مشترک دارند.

فرض کنید p، q، r، و s چهار خط راست مفروض باشند. دایره‌های محیطی (pqr) و (pqs) مربوط به دو مثلث pqr و pqs در نقطهٔ تلاقی p و q اشتراک دارند؛ پس در نقطهٔ دیگری، مانند M، هم یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر P، Q، R، و S تصاویر M به‌ترتیب برروی خطوط p، q، r، و s باشند، نقاط P، Q، و R باهم و نقاط P، Q، و S باهم همخط‌اند (§۲۸۲ الف)؛ پس چهار نقطهٔ P، Q، R، و S همخط‌اند.

پس تصاویر نقطهٔ M روی اضلاع مثلث qrs نیز همخط‌اند؛ یعنی M روی دایرهٔ محیطی این مثلث (§۲۸۲ ب)، و به دلیلی مشابه، روی دایرهٔ محیطی prs نیز قرار دارد.

۳۰۰. تعریف. نقطهٔ M(§۲۹۹) را نقطهٔ میکل برای چهار خط p، q، r و s می‌نامند.

۳۰۱. ملاحظه. چهارخط (که هیچ دوتایی از آنها موازی، و هیچ سه‌تایی از آنها همرس نیستند) مفروض‌اند. یک نقطه و تنها یک نقطه وجود دارد که تصاویرش براین خطوط همخط باشند.

۳۰۲. نتیجه. مراکز چهار دایرهٔ (pqr)، (qrs)، (rsp)، و (spq) و نقطهٔ M روی یک دایره قرار دارند (§۲۸۷، §۲۹۹).

درواقع، چهار نقطهٔ P، Q، R، و S همخط‌اند و نقطهٔ M با هر سه‌تایی از این چهار مرکز همدایره است (§۲۸۷)؛ پس این پنج نقطه همدایره‌اند.

۳۰۳. قضیه. چهار خط سیمسون نقطه‌ای از یک دایره را نسبت به چهار مثلثی که توسط رأسهای یک چهارضلعی محاط شده در این دایره تعیین می‌شوند، در نظر بگیرید. نقطهٔ در نظر گرفته شده نقطهٔ میکل این

چهار خط است.

فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی، P نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی آن، و A'، B'، و C' تصاویر نقطهٔ P روی خطوط DA، DB، و DC باشند. خطوط $A'B'$ ، $B'C'$، و $C'A'$ خطوط سیمسون P نسبت به مثلثهای DAB، DBC و DCA هستند، و نقطهٔ P با رأسهای مثلث $A'B'C'$ که توسط این خطوط سیمسون تشکیل می‌شود همدایره است، زیرا نقاط A'، B' و C' روی دایره‌ای به قطر PD قرار دارند.

برای هر سه خطی که از این چهار خط در نظر بگیریم، وضعیت مشابهی برقرار است. پس قضیه ثابت شده است (§۲۹۹، §۳۰۰).

۳۰۴. قضیه. چهار خط سیمسون چهار نقطهٔ یک دایره، که هرکدام نسبت به مثلثی که سه نقطهٔ دیگر رأسهای آن هستند، در نظر گرفته می‌شوند، همرس‌اند.

فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی باشد. خط سیمسون $D(ABC)$ از نقطهٔ وسط پاره‌خط بین D و مرکز ارتفاعی مثلث ABC می‌گذرد (§۲۹۰)، یعنی از یاد مرکز چهارضلعی $ABCD$ می‌گذرد (§۲۶۲). مطلب مشابهی در مورد خطوط سیمسون $A(BCD)$، $B(CDA)$ و $C(DAB)$ صادق است.

۳۰۵. قضیه. مراکز ارتفاعی چهارمثلثی که توسط چهار خط تعیین می‌شوند، همخط‌اند.

پاره‌خطهایی که نقطهٔ میکل M برای چهار خط p، q، r، و s (§۳۰۰) را به مراکز ارتفاعی چهار مثلثی که توسط این چهار خط تعیین می‌شوند، وصل می‌کنند (§۲۹۰) توسط خط سیمسون مشترک M نسبت به‌این چهار مثلث، یعنی خط $PQRS$، (§۲۹۹) نصف می‌شوند؛ پس این مراکز ارتفاعی روی خطی که در تجانس $(M,۲)$ با خط $PQRS$ متناظر است، قرار دارند.

تمرین

۱) دو مثلث در یک دایره محاط شده‌اند و نسبت به مرکز دایره متقارن‌اند. نشان دهید که دو خط سیمسون هر نقطه‌ای از دایره نسبت به این مثلثها برهم عمودند.

۲) رأسهای B و C و دایرهٔ محیطی (O) از مثلث متغیر ABC ثابت‌اند، و P و P' دو نقطهٔ ثابت از (O) هستند. نشان دهید نقطهٔ تلاقی خطوط سیمسون $P(ABC)$ و $P'(ABC)$ یک دایره را می‌پیماید.

۳) نشان دهید که خطوط سیمسون سه نقطهٔ برخورد امتداد ارتفاعهای یک مثلث با دایرهٔ محیطی، مثلثی متجانس با مثلث پادک می‌سازند، و مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث بر مرکز ارتفاعی مثلث پادک منطبق است.

۴) وترهای PA، PB، و PC در یک دایرهٔ مفروض، قطرهای سه دایرهٔ (PA)، (PB)، و (PC) هستند. دایرهٔ (PA) دو خط PB و PC را به‌ترتیب در A' و A'' قطع می‌کند؛ دایرهٔ (PB) دو خط PA و PC را به‌ترتیب در B' و B'' قطع می‌کند؛ و دایرهٔ (PC) دو خط PA و PB را به‌ترتیب در C' و C'' قطع می‌کند. نشان دهید که سه خط $A'A''$، $B'B''$ و $C'C''$ همرس‌اند.

تمرینهای تکمیلی

۱) مثلث متغیری دایرهٔ محیطی و مرکز ثقل ثابتی دارد. نشان دهید که خط سیمسون نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی نسبت به این مثلث، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۲) مثلث متغیر ABC در دایرهٔ ثابتی محاط است. رأس A و راستای نیمساز داخلی زاویهٔ A ثابت‌اند. نشان دهید که خط سیمسون نقطهٔ مفروض P نسبت به ABC راستای ثابتی دارد.

۳) دایرهٔ متغیری که از نقاط ثابت A و D می‌گذرد، دو خط ثابت را که از A می‌گذرند به‌ترتیب در B و C قطع می‌کند. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث ABC را بیابید.

۴) مثلث متغیری دایرهٔ محیطی ثابت و یک رأس ثابت دارد، و ضلع متغیر مقابل به این رأس از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. ثابت کنید که خط سیمسون نقطهٔ مفروضی روی دایرهٔ محیطی مثلث نسبت به‌این مثلث از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

۵) مرکز دایرهٔ متغیری روی قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC قرار دارد و دایره از نقطهٔ A می‌گذرد. این دایره دو ضلع AB و AC را به‌ترتیب در Q و R قطع می‌کند. مکان هندسی نقطهٔ وسط QR را بیابید.

۶) در یک دایرهٔ مفروض بی‌نهایت مثلث می‌توان محاط کرد به‌طوری‌که خط سیمسون نقطهٔ مفروضی از دایره نسبت به آنها بر خط مفروضی منطبق باشد. مکان هندسی مرکز ثقل این مثلثها را بیابید.

۷) از نقطهٔ P روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC عمودهایی بر اضلاع BC، CA و AB رسم می‌کنیم تا آنها را به‌ترتیب در نقاط L، M، و N و دایرهٔ محیطی را در A'، B'، و C' قطع کنند. خط سیمسون LMN خطوط $B'C'$، $C'A'$ و $A'B'$ را به‌ترتیب در L'، M'، و N' قطع می‌کند. ثابت کنید که خطوط AL'، BM'، و CN' همرس‌اند.

۸) خطی را که از تصاویر یک نقطهٔ متغیر از قاعدهٔ مثلثی برروی دو ضلع دیگر مثلث می‌گذرد در نظر می‌گیریم. مکان هندسی تصویر پای عمود وارد بر قاعدهٔ این مثلث را بر خط مذکور به‌دست آورید.

۹) ثابت کنید که اگر خط سیمسون نقطهٔ مفروضی نسبت به یک مثلث، از روبروی قطری این نقطهٔ مفروض در دایرهٔ محیطی مثلث بگذرد، از مرکز ثقل مثلث هم خواهد گذشت، و برعکس.

۱۰) مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنید که اضلاعش به‌ترتیب از سه نقطهٔ همخط مفروض بگذرند و دایرهٔ محیطی‌اش از نقطهٔ مفروض چهارمی عبور کند.

۱۱) شعاع OP از دایرهٔ محیطی مثلث ABC اضلاع این مثلث را در نقاط A'، B'، و C' قطع می‌کند. نشان دهید نقاط A''، B''، و C'' تصاویر نقاط A'، B'، و C' روی خطوط AP، BP و CP هستند روی خط سیمسون P نسبت به ABC قرار دارند.

۱۲) فرض کنید L، M، و N تصاویر نقطهٔ P از دایرهٔ محیطی مثلث ABC روی اضلاع BC، CA، و AB، و L'، M'، و N' نقاط برخورد خط سیمسون LMN با ارتفاعهای AD، BE و CF باشند. نشان دهید که: (الف) دو پاره‌خط LM و $L'M'$ با تصویر ضلع AB روی خط سیمسون برابرند؛ و (ب) تصاویر پاره‌خطهای AL'، BM'، و CN' روی LMN برابرند.

۱۳) از دو نقطهٔ انتهایی قطری از یک دایره، خطوطی به‌موازات خطوط سیمسون این نقاط نسبت به مثلث مفروضی محاط در این دایره رسم می‌کنیم. نشان دهید که نقاط وسط پاره‌خطهایی که اضلاع این مثلث روی این خطوط موازی جدا می‌کنند، همخط‌اند.

۱۴) ثابت کنید اگر سه مثلث در یک دایره محاط شده باشند، سه خط سیمسون هر نقطه‌ای از دایره نسبت به‌این مثلثها، مثلثی از نوع معین می‌سازند، چند حالت خاص را بررسی کنید.

۱۵) ثابت کنید پاهای سه ارتفاعی که از قطب سیمسون هر ضلع یک مثلث بر آن ضلع رسم می‌شوند، رأسهای یک مثلث منظری با مثلث اصلی را تشکیل می‌دهند (به ۳۴۴§ رجوع کنید.)

۱۶) (الف) نقطهٔ M روی دایرهٔ (O) قرار دارد و چهارضلعی (q) در (O) محاط شده است. ترکیبهای سه‌به‌سه از رأسهای چهارضلعی (q)، چهار مثلث را تعیین می‌کنند. چهار خط سیمسون (M) نسبت به‌این چهار مثلث را به‌دست می‌آوریم و (M) را روی آنها تصویر می‌کنیم، نشان دهید که این تصویرها

روی یک خط راست قرار دارند. این خط را می‌توان خط سیمسون (M) نسبت به چهارضلعی (q) نامید. (ب) اگر یک پنج ضلعی مفروض در دایرهٔ (O) محاط شده باشد، ترکیبهای چهاربه‌چهار از پنج رأس آن پنج چهارضلعی را تعیین می‌کنند. پنج خط سیمسون (M) نسبت به این پنج چهار ضلعی را به‌دست می‌آوریم، و (M) را روی آنها تصویر می‌کنیم، نشان دهید که این تصویرها روی یک خط راست قرار دارند. این خط را می‌توان خط سیمسون (M) نسبت به‌این پنج ضلعی نامید. (ج) اگر یک شش ضلعی مفروض در دایرهٔ (O) محاط شده باشد .... این فرایند را می‌توان به‌طور نامحدود ادامه داد.

۶

موربها

الف. مقدمه

۳۰۶. پاره‌خطهای جهتدار. وقتی دو یا چند پاره‌خط واقع بر یک خط را در نظر می‌گیریم، اگر علاوه بر طول هر پاره‌خط جهت آن‌را نیز در نظر بگیریم، ساده‌تر می‌توانیم روابط بین آنها را بیان کنیم.

یک نقطه می‌تواند یک خط را در دو جهت بپیماید. یکی از این دو جهت، مثلاً جهت چپ به راست را به دلخواه جهت مثبت و جهت دیگر را جهت منفی برمی‌گزینیم. اگر روی این خط پاره‌خط AB، ۵ سانتیمتر طول داشته باشد و نقاط انتهایی آن A و B باشند ، و اگر جهت A به B جهت مثبت خط باشد، می‌گوییم که این پاره‌خط ۵+ سانتیمتر طول دارد، ولی اگر جهت A به B جهت منفی خط باشد می‌گوییم طول پاره‌خط ۵− سانتیمتر است.

در نتیجه، در حالتی که اول بیان شد، طول پاره‌خط BA برابر ۵− سانتیمتر، و در حالت بعدی طول پاره‌خط BA برابر ۵+ سانتیمتر است. به این ترتیب بین دو انتهای A و B از این پاره‌خط تمایز قائل می‌شویم. وقتی پاره‌خط را AB می‌نامیم، A را ابتدا و B را انتهای آن می‌انگاریم، ولی وقتی آن را BA می‌نامیم، B ابتدای آن و A انتهای آن است.

وقتی برای پاره‌خطی هم طول و هم جهت در نظر می‌گیریم، آن‌را پاره‌خط جهتدار می‌نامیم.

واضح است که در مورد پاره‌خطهای جهتدار داریم

$$AB + BA = ۰ \qquad (۱)$$

۳۰۷. سه نقطهٔ همخط. وقتی که دو نقطهٔ A و B روی خطی مفروض باشند، می‌توانیم نقطهٔ سوم C را روی این خط بین A و B، بیرون آنها در سوی A، یا بیرون آنها در سوی B در نظر بگیریم. اگر بخواهیم مکان نقطهٔ C نسبت به نقاط A و B را تنها بر حسب طول پاره‌خطهای AB، AC، و BC بیان کنیم، برای سه حالت بیان شده برای C به سه معادلهٔ متفاوت می‌رسیم. با استفاده از پاره‌خطهای جهتدار می‌توانیم هر سه حالت را با یک معادله، یعنی

$$AB + BC + CA = ۰ \quad \text{یا} \quad AB = AC + CB \qquad (۲)$$

بیان کنیم.

تمرین

۱) نشان دهید که $AB + BC + CD = AD$.

۲) نشان دهید که اگر M نقطهٔ وسط پاره‌خط AB باشد، با در نظر گرفتن اندازه و جهت داریم $AB = ۲AM = ۲MB$.

۳) نشان دهید که اگر O، A، و B همخط باشند، با در نظر گرفتن اندازه و جهت داریم

$$OA^۲ + OB^۲ = AB^۲ + ۲OA \cdot OB$$

۴) نشان دهید اگر A، B، و P سه نقطهٔ همخط باشند، و M نقطهٔ وسط پاره‌خط AB باشد، با در نظر گرفتن اندازه و جهت، داریم $PM = \frac{۱}{۲}(PA + PB)$.

۵) نشان دهید اگر $OA + OB + OC = ۰$، و P نقطهٔ دلخواهی از خط AB باشد، آن‌گاه $PA + PB + PC = ۳PO$.

۶) نشان دهید که اگر روی یک خط داشته باشیم $OA + OB + OC = ۰$، و $O'A' + O'B' + O'C' = ۰$، آنگاه $AA' + BB' + CC' = ۳OO'$.

۷) نشان دهید که $AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = ۰$. راهنمایی. $CD = CA + AD$، $DB = DA + AB$، و $BC = BA + AC$. این رابطه‌ها را جایگزین، و عبارت حاصل را ساده کنید.

ب. قضیهٔ استوارت

۳۰۸. قضیه. اگر A، B، و C سه نقطهٔ همخط و P یک نقطهٔ دلخواه باشد، با در نظر گرفتن جهت و اندازه داریم

$$PA^۲ \cdot BC + PB^۲ \cdot CA + PC^۲ \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = ۰ \qquad (۱)$$

(الف) اگر P روی خط ABC نباشد، E را پای عمود رسم شده از P بر ABC در نظر بگیرید. داریم

$$PA^۲ = PE^۲ + EA^۲ = PE^۲ + (EC + CA)^۲$$
$$= PE^۲ + EC^۲ + ۲EC \cdot CA + CA^۲$$
$$PB^۲ = PE^۲ + EB^۲ = PE^۲ + (EC + CB)^۲$$
$$= PE^۲ + EC^۲ + ۲EC \cdot CB + CB^۲$$

و $PE^۲ + EC^۲ = PC^۲$، $CB = -BC$؛ با جایگزین کردن این رابطه‌ها به دست می‌آوریم

$$PA^۲ = PC^۲ + CA^۲ + ۲EC \cdot CA$$
$$PB^۲ = PC^۲ + BC^۲ - ۲EC \cdot BC$$

این دو رابطه را به ترتیب در BC و CA ضرب، و آنها را با هم جمع می‌کنیم:

$$PA^۲ \cdot BC + PB^۲ \cdot CA = PC^۲(BC + CA) + CA^۲ \cdot BC + BC^۲ \cdot CA$$
$$= PC^۲(BC + CA) + BC \cdot CA(CA + BC)$$
$$= (PC^۲ + BC \cdot CA)(BC + CA)$$
$$= (PC^۲ + BC \cdot CA)(-AB)$$

که همان رابطهٔ مطلوب (۱) است.

(ب) اگر P روی خط ABC باشد، رابطهٔ (۱) را برای نقطهٔ Q، که نقطهٔ دلخواهی از خط عمود بر ABC در نقطهٔ P است، می‌نویسیم

$$QA^۲ \cdot BC + QB^۲ \cdot CA + QC^۲ \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = ۰ \qquad (۲)$$

داریم $QA^۲ = QP^۲ + PA^۲$، $QB^۲ = QP^۲ + PB^۲$، و $QC^۲ = QP^۲ + PC^۲$. با جایگزین کردن این رابطه‌ها در (۲) و استفاده از رابطهٔ $AB + BC + CA = ۰$ رابطهٔ (۱) را به دست می‌آوریم.

تمرین

۱) با استفاده از رابطهٔ استوارت طول میانه‌ها، نیمسازها و $\cdots$ را در یک مثلث به دست آورید.

۲) نشان دهید که مجموع مربع فاصله‌های رأس قائمه یک مثلث قائم‌الزاویه از دو نقطه‌ای که وتر را به سه بخش مساوی تقسیم می‌کنند با $\frac{۵}{۹}$ مربع وتر برابر است.

۳) اگر H، G، O، و I به ترتیب مرکز ارتفاعی، مرکز ثقل، مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث باشند، نشان دهید که

$$HI^۲ + ۲OI^۲ = ۳(IG^۲ + ۲OG^۲), ۳(IG^۲ + \frac{۱}{۲}HG^۲) - IH^۲ = ۲R(R - ۲r)$$

که در آن R و r به ترتیب شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی هستند.

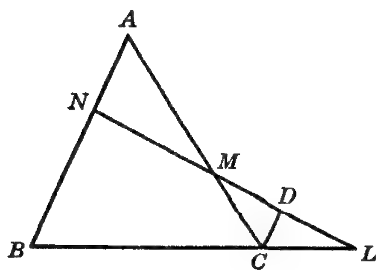
۴) اگر خطی که از رأس A در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌گذرد، BC را در F و دایرهٔ محیطی را در M قطع کند، نشان دهید که

$$\frac{۱}{MF} = \frac{۱}{MB} + \frac{۱}{MC}$$

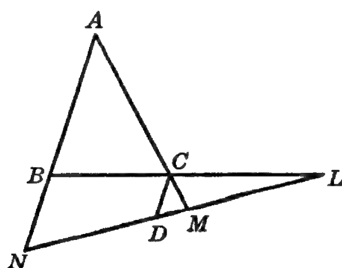
ج. قضیهٔ منلائوس

۳۰۹. مشاهده. یک مورب می‌تواند دو ضلع یک مثلث و امتداد ضلع سوم آن (شکل ۸۷ الف)، یا امتداد هر سه ضلع مثلث (شکل ۸۷ ب) را قطع کند.

نقطهٔ برخورد مورب با یک ضلع و دو رأس واقع بر آن ضلع دو پاره‌خط را تعیین می‌کنند. شش پاره‌خطی را که یک مورب به این ترتیب روی سه ضلع مثلث جدا می‌کند می‌توان به دو دسته، هر کدام شامل سه پاره‌خط غیر مجاور تقسیم کرد؛ منظور از سه پاره‌خط غیرمجاور آن‌است که‌هیچ دوتایی از آنها انتهای مشترک ندارند.



شکل۸۷ (الف)



شکل۸۷ (ب)

۳۱۰. قضیهٔ منلائوس. شش پاره‌خطی که یک مورب روی اضلاع مثلث ایجاد می‌کند، چنان‌اند که حاصل‌ضرب سه پاره‌خط غیرمجاور با حاصل‌ضرب سه پاره‌خط دیگر برابر است.

فرض کنید L، M، و N نقاط برخورد مورب LMN به ترتیب با اضلاع BC، CA، و AB از مثلث

ABC باشند (شکلهای ۸۷ الف و ب)، و خطی که از C به موازات ضلع روبرویش AB رسم می‌شود LMN را در D قطع کند. با توجه به مثلثهای متشابه NBL و DCL و مثلثهای متشابه MAN و MDC، داریم

$$BL \cdot DC = LC \cdot NB\,, \qquad CM \cdot AN = MA \cdot DC$$

پس با ضرب و ساده کردن به دست می‌آوریم

$$BL \cdot CM \cdot AN = LC \cdot NB \cdot MA$$

که قضیه را ثابت می‌کند.

۳۱۱. ملاحظهٔ ۱. غالباً بهتر است که این رابطه به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = ۱ \qquad (\mathrm{m})$$

رابطهٔ (m) را می‌توانیم به سادگی با دنبال کردن محیط مثلث در جهتی معین بنویسیم؛ اولین پاره‌خط بین یک رأس مثلث و نقطهٔ برخورد مورب با ضلعی که از آن رأس می‌گذرد، و دومین پاره‌خط بین آن نقطهٔ برخورد و رأس دیگری که روی آن ضلع قرار دارد، و به همین ترتیب تا به رأس اول برسیم.

۳۱۲. ملاحظهٔ ۲. اگر پاره‌خطهای رابطهٔ (m) را پاره‌خطهای جهتدار فرض کنیم و آنها را به ترتیب بیان شده در بالا بنویسیم، همیشه یکی از نسبتها منفی و دو نسبت دیگر یا هر دو مثبت یا هر دو منفی خواهند بود (§۳۰۹). پس با در نظر گرفتن اندازه و جهت داریم

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -۱ \qquad (\mathrm{m'})$$

۳۱۳. قضیهٔ عکس. اگر سه نقطه، هر کدام روی یک ضلع مثلثی، در نظر بگیریم، به‌طوری که روی اضلاع مثلث شش پاره‌خط جدا کنند که قدرمطلق حاصل‌ضرب سه پاره‌خط غیر مجاور با قدر مطلق حاصل‌ضرب سه پاره‌خط دیگر برابر و علامت این دو حاصل‌ضرب مخالف هم باشند، آن سه نقطه همخط‌اند.

فرض کنید سه نقطهٔ L، M، و N سه نقطه روی سه ضلع مثلث ABC باشند به‌طوری که رابطهٔ (m′) برقرار باشد. اگر سه نقطه همخط نباشند، فرض کنید خطی که از M و N می‌گذرد ضلع BC را در K قطع کند؛ با توجه به قضیهٔ منلائوس،

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CM}{MA} = -۱$$

از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ (m′)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$BL : LC = BK : KC$$

یعنی نقاط K و L پاره‌خط BC را به یک نسبت، از لحاظ اندازه و علامت، تقسیم می‌کنند؛ پس دو نقطه بر هم منطبق‌اند و قضیه ثابت می‌شود.

۳۱۴. قضیه. (الف) نیمسازهای خارجی زاویه‌های مثلث، اضلاع روبرو را در سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند. (ب) دو نیمساز داخلی دو زاویه و نیمساز خارجی زاویهٔ سوم مثلث، اضلاع روبرو را در سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند.

(الف) اگر U'، V'، و W' نقاط برخورد نیمسازهای خارجی زاویه‌های A، B، و C با اضلاع روبرو

باشند، داریم

$$BU' : U'C = c : b\,, \quad CV' : V'A = a : c\,, \quad AW' : W'B = b : a$$

پس حاصل‌ضرب سه نسبت برابر یک است و قضیه ثابت می‌شود (§۳۱۳).

اثبات (ب) شبیه اثبات (الف) است.

۳۱۵. ملاحظه. شش نیمساز زاویه‌های مثلث اضلاع روبرو را در شش نقطه قطع می‌کنند که سه به سه روی چهار خط راست قرار دارند.

۳۱۶. نتیجه. اضلاع مثلث پادک یک مثلث مفروض، اضلاع آن مثلث را در سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند (§۱۹۳).

۳۱۷. تعریف. خطی که از این سه نقطه (§۳۱۶) می‌گذرد، محور پادک مثلث نامیده می‌شود.

۳۱۸. قضیه. خطوطی که در رأسهای یک مثلث بر دایرهٔ محیطی مماس می‌شوند، اضلاع مقابل را در سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند.

شکل۸۸

فرض کنید L، M، و N (شکل ۸۸) نقاط برخورد BC، CA، و AB با مماسهایی باشند که در نقاط A، B، و C بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC رسم می‌شوند. اندازهٔ زاویه‌های LAB و C نصف کمان $\widehat{AB}$ است، پس دو مثلث ALB و ALC متشابه‌اند؛ پس،

$$AL : LC = AB : AC \quad \text{یا} \quad AL^2 : LC^2 = AB^2 : AC^2$$

اما $AL^2 = LB \cdot LC$؛ پس

$$BL : LC = c^2 : b^2$$

به طور مشابه،

$$CM : MA = a^2 : c^2\,, \quad AN : NB = b^2 : a^2$$

پس نقاط L، M، و N همخط‌اند (§۳۱۳).

۳۱۹. ملاحظه. در ضمن ثابت کردیم که خط مماس بر دایرهٔ محیطی در یک رأس مثلث، ضلع روبرو را به‌طور خارجی به نسبت مربع دو ضلع مجاور تقسیم می‌کند.

۳۲۰. یادآوری. خطوطی که در سه رأس یک مثلث مفروض بر دایرهٔ محیطی این مثلث مماس می‌شوند، مثلثی تشکیل می‌دهند که مثلث مماسی آن مثلث نامیده می‌شود (§۱۹۰).

۳۲۱. قضیه. نقاط همنوای سه نقطهٔ همخط، همخط‌اند.

اگر L، M، و N سه نقطهٔ همخط روی اضلاع BC، CA، و AB از مثلث ABC باشند، داریم (§۳۱۰)

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=-1$$

اگر L'، M'، و N' نقاط همنوای نقاط L، M، و N باشند، داریم

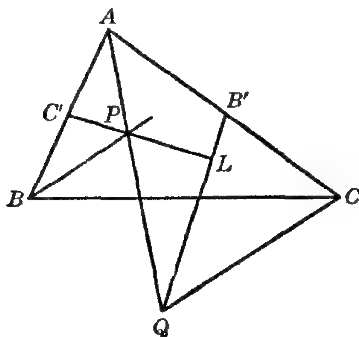
$$CL':L'B=BL:LC\,,\qquad BN':N'A=AN:NB\,,\qquad AM':M'C=CM:MA$$

و قضیه ثابت می‌شود (§۳۱۳).

۳۲۲. تعریف. موربهایی مانند LMN و $L'M'N'$ را گاهی موربهای معکوس یا موربهای همنوا می‌نامند.

۳۲۳. مسئله. دو خط در راستاهای مفروض رسم کنید به طوری که دو مورب معکوس برای مثلث مفروضی باشند.

فرض کنید ABC (شکل ۸۹) مثلث مفروض باشد، و خطی که از A، در راستای d رسم می‌شود، دو خطی را که از نقاط B و C در راستای مفروض d' رسم می‌شوند در نقاط P و Q قطع کند. اگر B' وسط AC و C' وسط AB باشد، نقطهٔ $L=(PC',QB')$ نقطهٔ مشترک دو مورب مطلوب است. چون نقطهٔ L با Q و B' همخط است، خطوطی که از L به موازات QA و QC رسم می‌شوند ضلع AC را در دو نقطهٔ همنوا، و ضلع AB را در دو نقطهٔ همنوا قطع می‌کنند.



شکل۸۹

۳۲۴. قضیه. اگر دو نقطهٔ D و D'؛ دو نقطهٔ E و E'؛ و دو نقطهٔ F و F' نقاط همنوا به ترتیب روی اضلاع BC، CA، و AB از مثلث ABC باشند، دو مثلث DEF و $D'E'F'$ هم‌ارزند.

فرض کنید خطوط EF و $E'F'$ (شکل ۹۰) BC را در G و G' قطع کنند. فواصل نقاط C و D از قاعدهٔ EF با GC و GD متناسب‌اند؛ پس،

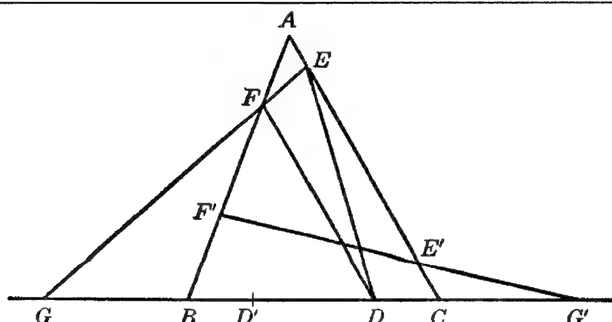
$$\text{مساحت } CEF : \text{مساحت } DEF = GC:GD$$

و به طور مشابه،

$$\text{مساحت } BE'F' : \text{مساحت } D'E'F' = G'B:G'D'$$

با توجه به موربهای معکوس EF و $E'F'$، داریم

$$GC=G'B\,,\qquad GD=G'D'$$



شکل ۹۰

پس،

$$\text{مساحت}\ D'E'F' : \text{مساحت}\ BE'F' = \text{مساحت}\ DEF : \text{مساحت}\ CEF$$

در ضمن،

$$\text{مساحت}\ E'F'B = \text{مساحت}\ E'AF = \text{مساحت}\ FAE' = \text{مساحت}\ FEC = \text{مساحت}\ CEF$$

پس مساحت مثلثهای DEF و $D'E'F'$ یکسان است.

تمرین

۱) میانهٔ AA' از مثلث ABC ضلع $B'C'$ از مثلث میانک $A'B'C'$ را در P و CP ضلع AB را در Q قطع می‌کند. نشان دهید که $AB = ۳AQ$.

۲) نشان دهید که اگر خطی که از G، مرکز ثقل مثلث ABC می‌گذرد، AB را در M و AC را در N قطع کند، با در نظر گرفتن اندازه و علامت خواهیم داشت $AN \cdot MB + AM \cdot NC = AM \cdot AN$.

۳) ثابت کنید که دو خط سیمسون متعامد، موربهای معکوس هستند.

۴) ثابت کنید مثلثی که رأسهای آن نقاط تماس اضلاع مثلث مفروضی با دایره‌های محاطی خارجی نسبت به آن اضلاع هستند، با مثلثی که رأسهای آن نقاط تماس اضلاع مثلث مفروض با دایرهٔ محاطی داخلی آن هستند، هم‌ارز است.

۵) دو مورب PQR و $P'Q'R'$ اضلاع BC، CA، و AB از مثلث ABC را در جفت نقاط P، P'؛ Q، Q'؛ و R، R' قطع می‌کنند. نشان دهید که سه نقطهٔ $X = (BC, QR')$، $Y = (CA, RP')$، و $Z = (AB, PQ')$ همخط‌اند.

۶) نشان دهید که تصویرهای هر نقطه از دایرهٔ محیطی یک چهار ضلعی محاطی بر روی اضلاع چهارضلعی این اضلاع را به هشت پاره‌خط تقسیم می‌کنند که‌حاصل‌ضرب چهار پاره‌خط غیر مجاور با حاصل‌ضرب چهار پاره‌خط دیگر برابر است. راهنمایی. خطوط سیمسون را خطوط مورب در نظر بگیرید.

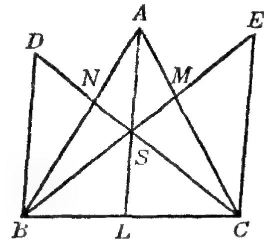
۷) دایره‌ای که مرکز آن از دو رأس A و B از مثلث ABC به یک فاصله است، دو ضلع BC و AC را در جفت نقاط P، P'؛ و Q، Q' قطع می‌کند. نشان دهید که دو خط PQ و $P'Q'$ ضلع AB را در دو نقطهٔ همنوا قطع می‌کنند.

۸) دو پاره‌خط برابر AE و AF را روی دو ضلع AB و AC از مثلث ABC در نظر می‌گیریم. نشان دهید که میانهٔ رسم شده از رأس A، EF را به نسبت دو ضلع AC و AB تقسیم می‌کند.

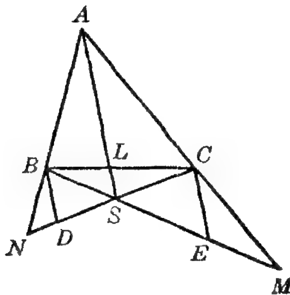
د. قضیهٔ سِوا

۳۲۵. مشاهده. اگر نقطهٔ S را درون مثلث ABC بگیریم، L، M، و N نقاط تلاقی اضلاع BC، CA، و AB باخطوط AS، BS، و CS، این اضلاع را به طور داخلی تقسیم می‌کنند (شکل ۹۱ الف)؛ اگر نقطهٔ S

خارج مثلث ABC باشد، یکی از نقاط L، M، و N ضلع متناظر را به‌طور داخلی تقسیم می‌کند، و دو نقطهٔ دیگر اضلاع متناظرشان را به‌طور خارجی تقسیم می‌کند (شکل ۹۱ ب).



شکل۹۱ (الف)



شکل۹۱ (ب)

شش پاره‌خطی را که توسط نقاط L، M، و N روی اضلاع جدا می‌شود می‌توان به دو گروه،هر یک حاوی سه پاره‌خط غیر مجاور تقسیم کرد (§۳۰۹).

۳۲۶. قضیهٔ سِوا. خطوطی که رأسهای مثلث را به یک نقطهٔ مفروض وصل می‌کنند، روی اضلاع مثلث شش پاره‌خط جدا می‌کنند، به طوری که حاصل‌ضرب سه پاره‌خط غیر مجاور با حاصل‌ضرب سه پاره‌خط دیگر برابر است.

فرض کنید خطوط BD و CE که از رأسهای B و C به موازات ASL رسم می‌شوند (شکلهای ۹۱ الف و ب)، CN و BM را به ترتیب در D و E قطع کنند. با توجه به مثلثهای متشابه، داریم

$$AN : NB = AS : BD$$

$$BL : BC = LS : CE$$

$$BC : LC = BD : LS$$

$$CM : MA = CE : AS$$

با ضرب کردن این تساویها در هم و ساده کردن رابطهٔ حاصل، به دست می‌آوریم

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = ۱ \qquad \text{(c)}$$

که قضیه را ثابت می‌کند.

راه دیگر. اگر دو مثلث ALC و ALB (شکل ۹۱) را به ترتیب با دو مورب BSM و CSN قطع کنیم، بنابر قضیهٔ منلائوس، با در نظر گرفتن اندازه و علامت داریم

$$LB \cdot CM \cdot AS = -BC \cdot MA \cdot SL$$

$$AN \cdot BC \cdot LS = -NB \cdot CL \cdot SA$$

با ضرب کردن دو طرف در هم و ساده کردن رابطهٔ حاصل، رابطهٔ (c) به دست می‌آید.

۳۲۷. ملاحظه. اگر پاره‌خطها را جهتدار در نظر بگیریم، یکی ازسه نسبت رابطهٔ (c) همواره مثبت، و دو تای دیگر یاهر دو مثبت یاهر دو منفی‌اند (§۳۲۵)؛ بنابراین، رابطهٔ (c) هم از لحاظ اندازه و هم از لحاظ علامت معتبر است.

رابطهٔ (c) را به آسانی می‌توان مانند رابطهٔ (m) نوشت (§۳۱۱).

۳۲۸. قضیهٔ عکس. اگر سه نقطه روی سه ضلع یک مثلث، این اضلاع را به شش پاره‌خط تقسیم کنند، به‌طوری که حاصل‌ضرب پاره‌خطهای هر یک از دو دسته پاره‌خطهای غیرمجاور، از لحاظ اندازه و علامت، با هم برابر باشند، خطوطی که این نقاط را به رأسهای مقابل متناظرشان وصل می‌کنند همرس‌اند.

اثبات شبیه اثبات عکس قضیه منلائوس است (§۳۱۳).

۳۲۹. دو تعریف. اگر خطی رسم شود که از یک رأس مثلث بگذرد، پاره خط بین این رأس و ضلع مقابل آن‌را سِوایی می‌نامیم. پاره‌خطهای AL، BM، و CN (شکل ۹۱) سِوایی هستند.

مثلث LMN (شکل ۹۱) را می‌توان مثلث سوایی نقطهٔ S برای مثلث ABC نامید.

۳۳۰. قضیه. خطوطی که رأسهای یک مثلث را به نقاط تماس اضلاع مقابل با دایرهٔ محاطی داخلی مثلث وصل می‌کنند، همرس‌اند.

اگر X، Y، و Z نقاط تماس اضلاع BC، CA، و AB از مثلث ABC با دایرهٔ محاطی داخلی آن باشند، داریم (§۱۵۷)

$$AZ = AY\ , \qquad BX = BZ\ , \qquad CY = CX$$

پس،

$$AZ \cdot BX \cdot CY = BZ \cdot CX \cdot AY$$

که قضیه را ثابت می‌کند (§۳۲۸).

۳۳۱. تعریف. نقطهٔ مشترک خطوط AX، BY، و CZ، (§۳۳۰) را غالباً نقطهٔ ژرگون مثلث می‌نامند.

۳۳۲. قضیه. خطوطی که از نقاط تماس یک دایرهٔ محاطی خارجی مثلثی با اضلاع مثلث به رأس مقابل هر ضلع رسم می‌شوند، همرس‌اند.

۳۳۳. قضیه. خطوطی که از رأسهای یک مثلث به نقطه‌های تماس ضلع مقابل هر رأس با دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع رسم می‌شوند، همرس‌اند.

اثبات این دو قضیه شبیه اثبات قضیهٔ قبلی (§۳۳۰) است.

۳۳۴. تعریف. نقطهٔ مشترک سه خط مذکور در قضیهٔ قبل (§۳۳۳) را غالباً نقطهٔ ناگل مثلث می‌نامند.

تمرین

۱) با استفاده از قضیهٔ سوا ثابت کنید که در مثلث (الف) میانه‌ها همرس‌اند ؛ (ب) نیمسازهای داخلی همرس‌اند؛ (ج) ارتفاعها همرس‌اند. راهنمایی. $AF : AE = b : c$.

۲) خطی به موازات ضلع BC ازمثلث ABC، دو ضلع AB و AC را در B' و C' قطع می‌کند. ثابت کنید که دو خط BC' و $B'C$ یکدیگر را روی میانهٔ رسم شده از A قطع می‌کنند.

۳) مثلث ABC و دو نقطهٔ P و P' مفروض‌اند. خطوطی که از P' به موازات PA و PB و PC رسم می‌شوند، BC، CA، و AB را در D'، E'، و F' و خطوطی که از P به‌موازات $P'A$، $P'B$، و $P'C$ رسم می‌شوند، BC، CA، و AB را در D، E، و F قطع می‌کنند. نشان دهید اگر خطوط AD'، BE'، و CF' همرس باشند، خطوط AD، BE، و CF نیز همرس خواهند بود.

۴) نقطهٔ M روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد؛ به مرکز M دایره‌هایی رسم می‌کنیم که به‌ترتیب از B و C بگذرند. این دایره‌ها به ترتیب AB و AC را در N و P نیز قطع می‌کنند. موضع M باید کجا باشد تا خطوط AM، BP، و CN همرس باشند؟ راهنمایی. محل برخورد BC با میانه‌های وارد بر

AB و AC را در نظر بگیرید.

۳۳۵. قضیه. اگر سه خطی که سه نقطهٔ مفروض روی سه ضلع یک مثلث را به رأسهای مقابل هر ضلع وصل می‌کنند همرس باشند، این مطلب برای نقاط همنوای آن نقاط نیز صادق است.

اثبات شبیه اثبات مربوط به موربهای معکوس (§۳۲۱) است.

۳۳۶. تعریف. نقاط مشترک بین دو دسته خطوط همرس در نظرگرفته شده (§۳۳۵) را می‌توان نقاط مزدوج همنوا برای مثلث، یا به اختصار، نقاط همنوا برای مثلث نامید.

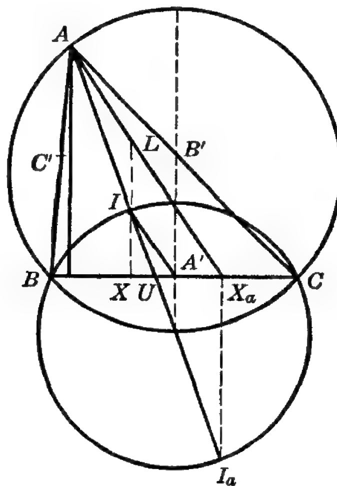
۳۳۷. قضیه. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث، نقطهٔ ناگل مثلث میانک آن مثلث است.

فرض کنید L محل برخورد امتداد خط IX با خط AX_a (شکل ۹۲) باشد. با توجه به مثلثهای متشابه IUX و UX_aI_a، و همچنین مثلثهای متشابه AIL، AI_aX_a، داریم

$$XI : X_aI_a = IU : UI_a \ , \ IL : X_aI_a = IA : AI_a$$

طرفهای راست این دو تساوی برابرند. در واقع، دو جفت نقطهٔ A، U و I، I_a همسازند (§۱۲۰)؛ پس $XI = IL$، و $XA' = A'X_a$ (§۱۶۰). پس خطوط $A'I$ و AX_a موازی‌اند.

دو خط $A'I$ و AX_a را می‌توان عناصر متناظر در دو شکل متجانس متشکل از مثلث ABC و مثلث میانک آن، مثلث $A'B'C'$ (§۹۸) دانست، زیرا این دو خط موازی‌اند و از نقاط متجانس A و A' می‌گذرند. پس خط $A'I$ و خطوط متناظرش $B'I$ و $C'I$، در نقطهٔ ناگل مثلث $A'B'C'$ همرس‌اند؛ یعنی نقطهٔ ناگل $A'B'C'$ بر I منطبق است.



شکل۹۲

۳۳۸. نتیجهٔ ۱. M، نقطهٔ ناگل ABC، و I، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن، با G، مرکز ثقل مثلث ABC، همخط‌اند و $2IG = GM$.

۳۳۹. نتیجهٔ ۲. نقطهٔ ناگل یک مثلث، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث پادمکمل آن است.

۳۴۰. قضیه. اگر LMN مثلث سِوایی نقطهٔ S برای مثلث ABC باشد، داریم

$$\frac{SL}{AL} + \frac{SM}{BM} + \frac{SN}{CN} = ۱$$

پاره‌خطهای SL و AL با فاصله‌های نقاط S و A از ضلع BC متناسب‌اند؛ پس

$$SL : AL = \text{مساحت}SBC : \text{مساحت}ABC$$

و به طور مشابه،

$$SM : BM = \text{مساحت}SCA : \text{مساحت}ABC \ , \ SN : CN = \text{مساحت}SAB : \text{مساحت}ABC$$

با جمع کردن این سه برابری و مشاهدهٔ اینکه

$$\text{مساحت}ABC = \text{مساحت}SAB + \text{مساحت}SCA + \text{مساحت}SBC$$

رابطهٔ بیان شده به دست می‌آید.

این رابطه از نظر اندازه و علامت معتبر است و به موضع نقطهٔ S نسبت به مثلث ABC بستگی ندارد.

۳۴۱. نتیجه. داریم

$$\frac{AS}{AL} + \frac{BS}{BM} + \frac{CS}{CN} = ۲$$

در واقع، داریم

$$\frac{AS}{AL} = \frac{AL - SL}{AL} = ۱ - \frac{SL}{AL}$$

برای دو نسبت دیگر هم رابطهٔ مشابهی داریم. با جمع کردن این سه رابطه به آسانی به رابطهٔ بیان شده می‌رسیم.

۳۴۲. قضیه. اگر LMN مثلث سِوایی نقطهٔ S برای مثلث ABC باشد، داریم

$$\frac{AS}{SL} = \frac{AM}{MC} + \frac{AN}{NB}$$

اگر خطوطی که از C و B به موازات ASL رسم می‌کنیم، BM و CN را به ترتیب در E و D قطع کنند، با توجه به مثلثهای متشابه، داریم

$$AS : EC = AM : MC$$

$$AS : DB = AN : NB$$

$$SL : EC = BL : BC$$

$$SL : DB = LC : BC$$

با تقسیم کردن مجموع دو برابری اول بر مجموع دو برابری دیگر به آسانی به رابطهٔ بیان شده می‌رسیم.

۳۴۳. قضیهٔ دزارگ. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مفروض‌اند. اگر سه خط AA'، BB'، و CC' در نقطهٔ S یکدیگر را قطع کنند، سه نقطهٔ $P \equiv (BC, B'C')$، $Q \equiv (CA, C'A')$، و $R \equiv (AB, A'B')$ روی خطی مانند s، قرار دارند، و برعکس.

سه مورب $PB'C'$، $QC'A'$، و $RA'B'$ به ترتیب مثلثهای SBC، SCA و SAB (شکل ۹۳) را قطع می‌کنند. بنابر قضیهٔ منلائوس، از نظر اندازه و علامت، داریم

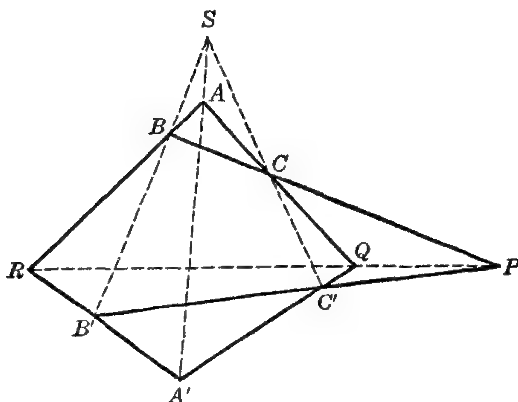
$$\frac{SB'}{B'B} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CC'}{C'S} = -۱ \ , \ \frac{SC'}{C'C} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AA'}{A'S} = -۱ \ , \ \frac{SA'}{A'A} \cdot \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BB'}{B'S} = -۱$$

با ضرب کردن این سه برابری، پس از ساده کردن، به دست می‌آوریم

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -۱$$

که قضیه را ثابت می‌کند (§۳۱۳).

برعکس فرض کنید سه نقطهٔ P، Q، و R همخط باشند. اگر دو خط BB' و CC' یکدیگر را در S قطع کنند، باید ثابت کنیم که خط AA' نیز از S می‌گذرد.



شکل۹۳

بنابر فرض، خطوط QR، CB، $C'B'$ که رأسهای متناظر دو مثلث QCC' و RBB' را به هم وصل می‌کنند همرس‌اند؛ پس بنابر حکم مستقیم قضیه، سه نقطهٔ $S \equiv (CC', BB')$، $A \equiv (QC, RB)$، و $A' \equiv (C'Q, B'R)$ همخط‌اند.

۳۴۴. تعریف. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را مثلثهای همتا یا منظری می‌نامند.

نقطهٔ S مرکز همتایی و خط PQR محور همتایی دو مثلث نامیده می‌شوند.

تمرین

۱) اگر نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع BC، CA، و AB را به ترتیب X، Y، و Z بنامیم و M نقطهٔ ژرگون ABC باشد، نشان دهید که $AM : MX = a(p-a) : (p-b)(p-c)$؛ همچنین ثابت کنید که $(AM : MX) \cdot (BM : MY) \cdot (CM : MZ) = ۴R : r$. نتایج مشابهی را برای دایره‌های محاطی خارجی بیان و آنها را ثابت کنید.

۲) ثابت کنید که مجموع عکس سه پاره‌خط سوایی که از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرند دو برابر عکس شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

۳) O نقطه‌ای دلخواه است و A' و B' و C' سه نقطهٔ دلخواه به ترتیب روی اضلاع BC، CA و AB از مثلث ABC هستند. خطوط AP، BQ و CR که از رأسهای مثلث ABC به ترتیب به موازات خطوط OA'، OB'، و OC' رسم می‌شوند اضلاع BC، CA و AB را به ترتیب در نقاط P، Q، و R قطع می‌کنند. نشان دهید که

$$\frac{OA'}{AP} + \frac{OB'}{BQ} + \frac{OC'}{CR} = ۱$$

۴) اگر ارتفاعهای AD، BE، و CF از مثلث ABC دایرهٔ محیطی مثلث را مجدداً در P، Q، و R قطع کنند، نشان دهید که

$$\frac{AP}{AD} + \frac{BQ}{BE} + \frac{CR}{CF} = ۴$$

۵) خطوطی که از M به موازات اضلاع مثلث ABC رسم شده‌اند، میانه‌های وارد بر ضلع متناظر را به ترتیب در نقاط P، Q، و R قطع می‌کنند. نشان دهید که با در نظر گرفتن اندازه و علامت داریم

$$\frac{GP}{GA}+\frac{GQ}{GB}+\frac{GR}{GC}=\text{۰}$$

۶) AP، BQ، و CR قطرهایی از دایرهٔ محیطی مثلث ABC هستند که اضلاع BC، CA، و AB را به ترتیب در نقاط K، L، و M قطع می‌کنند. نشان دهید که $(KP:AK)+(LQ:AQ)+(MR:AM)=\text{۱}$.

۷) نشان دهید خطی که از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC به نقطهٔ وسط پاره‌خط واصل بین A و نقطهٔ ناگل ABC رسم می‌شود، توسط میانهٔ گذرنده از رأس A نصف می‌شود.

۸) با استفاده از قضیهٔ دزارگ ثابت کنید که (الف) اضلاع مثلث پادک اضلاع مثلث مفروض را در سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند؛ (ب) خطوطی که نقاط تماس اضلاع مثلث با دایرهٔ محاطی داخلی را به هم وصل می‌کنند، اضلاع متناظر مثلث را در سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند؛ (ج) خطوطی که رأسهای یک مثلث را به رأسهای متناظر مثلث مماسی آن مثلث وصل می‌کنند، همرس‌اند. قضایای مشابه دیگری را بیان و آنها را ثابت کنید.

تمرینهای تکمیلی

۱) با استفاده از قضیهٔ منلائوس، قضیهٔ خط سیمسون (§۲۸۲) را ثابت کنید.

۲) (الف) از هر رأس مثلث خطهایی به نقاط تماس ضلع روبرو با دایره‌های سه مماس مثلث رسم می‌کنیم. نشان دهید که این دوازده خط، سه به سه در هشت نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و این هشت نقطه را می‌توان به چهارجفت نقاط همنوا برای مثلث تقسیم کرد؛ (ب) نشان دهید چهار تا از این نقاط مراکز سه مماس مثلث پادمکمل مثلث مفروض هستند.

۳) نشان دهید اگر دو مثلث نسبت به یک نقطه متقارن باشند، موربهای معکوس اضلاع یکی از مثلثها نسبت به مثلث دیگر، همرس‌اند.

۴) اگر اضلاع مثلث سِوایی یک نقطه برای مثلث مفروضی، با اضلاع مثلث مفروض پادموازی باشند، نشان دهید که آن نقطه بر مرکز ارتفاعی مثلث مفروض منطبق است.

۵) سه خط موازی توسط سه مورب موازی در نقاط A، B، C؛ A'، B'، C'؛ A''، B''، C'' قطع شده‌اند. نشان دهید که خطوط $B''C$، $C'A''$، و AB' همرس‌اند.

۶) یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک نقطه مفروض‌اند. از هر رأس مثلث خطی به تصویر نقطهٔ مفروض بر ضلع مقابل آن رأس رسم می‌کنیم. نشان دهید که این خطوط همرس‌اند.

۷) مثلث $(Q)=DEF$ در مثلث $(P)=ABC$، و مثلث $(R)=KLM$ در مثلث (Q) محاط شده است . نشان دهید که اگر دو تا از این مثلثها نسبت به مثلث سوم منظری باشند، نسبت به یکدیگر نیز منظری هستند.

۸) از رأسهای مثلث ABC خطوطی رسم شده‌اند که از O می‌گذرند و اضلاع مقابل را در D، E، و F قطع می‌کنند. ثابت کنید خطوطی که از A، B، و C به نقاط وسط پاره‌خطهای EF، FD، و DE رسم می‌شوند، همرس‌اند.

۹) (Q) مثلث سوایی نقطهٔ M برای مثلث (P) است. اگر از هر رأس (P) خطی به موازات ضلع متناظر مثلث (Q) رسم کنیم، سه خط رسم شده یک مثلث تشکیل می‌دهند. نشان دهید که این مثلث با مثلث

(P) منظری است.

۱۰) در یک مثلث سه پاره‌خط سوایی همرس داریم. از وسط هر پاره‌خط سوایی خطی به نقطهٔ وسط ضلع متناظر در مثلث رسم می‌کنیم. نشان دهید که این سه خط همرس‌اند.

۱۱) از هر رأس مثلث مفروض (Q) خطی به موازات ضلع متناظر در مثلث مفروض (P') رسم می‌کنیم، تا مثلث (P) تشکیل شود. همچنین از هر رأس مثلث (P') خطی به‌موازات ضلع متناظر در مثلث (Q) رسم می‌کنیم تا مثلث (Q') تشکیل شود. نشان دهید که اگر دو مثلث (P) و (Q) یا دو مثلث (P') و (Q')، منظری باشند دو مثلث دیگر هم منظری هستند.



تقسیم همساز

۳۴۵. تعریف. فرض کنید نقاط C و D پاره‌خط AB را به‌طور داخلی و خارجی به یک نسبت تقسیم کنند (§۵۴). اگر پاره‌خطهای روی خط $ABCD$ را پاره‌خطهای جهتدار (§۳۰۶) در نظر بگیریم، و توافق کنیم که نسبتهای تقسیم پاره‌خط AB توسط نقاط C و D را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$AC : CB \quad , \quad AD : DB$$

نسبت اول مثبت و نسبت دوم منفی خواهد بود. پس با در نظرگرفتن اندازه و علامت داریم

$$(AC : CB) + (AD : DB) = ۰ \tag{a}$$

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \quad \text{یا} \quad \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -۱ \tag{b}$$

رابطهٔ (b) را گاهی با نماد $(ABCD) = -۱$ نشان می‌دهیم، و می‌گوییم که این چهار نقطه یک گسترهٔ همساز تشکیل می‌دهند.

۳۴۶. قضیه. اگر پاره‌خطهای گسترهٔ همساز $(ABCD) = -۱$ را از O، نقطهٔ وسط پاره‌خط AB، اندازه بگیریم، با در نظرگرفتن اندازه و علامت خواهیم داشت

$$OC \cdot OD = OA^۲ \tag{c}$$

از رابطهٔ (b) داریم

$$\frac{AC + CB}{AC - CB} = \frac{AD - DB}{AD + DB} \tag{d}$$

حال با استفاده از روابط داده شده در (§۳۰۶) و (§۳۰۷)، با در نظرگرفتن علامت و اندازه خواهیم داشت

$$\left.\begin{aligned} AC + CB &= AB = AD + DB = ۲AO \\ AC - CB &= (AO + OC) - (CO + OB) = ۲OC \\ AD - DB &= (AO + OD) - (DO + OB) = ۲OD \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

با قرار دادن این مقادیر در (d) رابطهٔ (c) به‌دست می‌آید.

۳۴۷. قضیه عکس. اگر O نقطهٔ وسط پاره‌خط AB باشد، و C و D دو نقطهٔ خط AB باشند، به‌طوری که با در نظرگرفتن اندازه و علامت داشته باشیم $OC \cdot OD = OA^۲$، آن‌گاه $(ABCD)$ یک گسترهٔ همساز است.

در واقع با توجه به رابطهٔ مفروض و با استفاده‌از روابط (e)، به‌آسانی (d)را به‌دست می‌آوریم، و از آن (b) نتیجه می‌شود.

۳۴۸. قضیه. اگر در گستره توافقی $(ABCD)$ همهٔ پاره‌خطها از یک نقطهٔ گسترهٔ، مثلاً B، اندازه گرفته شوند، آن‌گاه با در نظرگرفتن اندازه و علامت داریم

$$\frac{۲}{BA} = \frac{۱}{BC} + \frac{۱}{BD} \tag{f}$$

چون $AC = AB + BC$، $AD = AB + BD$ رابطهٔ (b)(§۳۴۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{AB + BC}{CB} = -\frac{AB + BD}{DB}$$

پس،

$$-۱ + (BA : BC) = ۱ - (BA : BD)$$

و (f) به‌آسانی نتیجه می‌شود.

۳۴۹. قضیهٔ عکس. اگر A، B، C، و D چهار نقطهٔ همخط باشند، و پاره‌خطهای BA، BC، و BD در رابطهٔ (f) صدق کنند، این نقاط یک گسترهٔ همساز تشکیل می‌دهند.

برای اثبات این قضیه باید گامهای بالا به‌صورت معکوس برداشته شود.

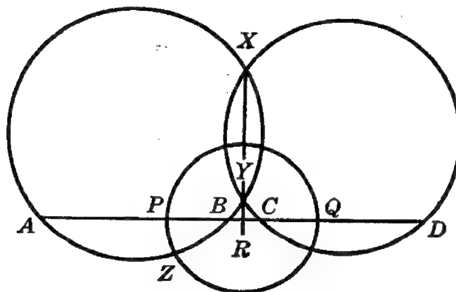
۳۵۰. مسئله. دو نقطه بیابید که هریک از دو جفت نقطهٔ مفروض همخط را به‌طور توافقی تقسیم کنند.

دو جفت نقطهٔ مفروض A، B؛ و C، D (شکل ۹۴) و نقطهٔ دلخواه X در خارج خط مفروض، دو دایرهٔ XAB و XCD را تعیین می‌کنند که یکدیگر را در نقطهٔ دیگری مانند Y نیز قطع می‌کنند. دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ R، محل برخورد خط XY با AB، و شعاعش طول مماس RZ از R بر دایرهٔ XAB است، خط AB را در دو نقطهٔ مطلوب P و Q قطع می‌کند.

در واقع، داریم

$$RP^۲ = RZ^۲ = RX \cdot RY = RA \cdot RB = RC \cdot RD$$

پس نقاط P و Q دو شرط بیان شده در مسئله را دارند (§۳۴۶).



شکل۹۴

بحث. برای اینکه مسئله جواب داشته باشد، باید نقطهٔ R خارج دایره‌های XAB و XCD قرارگیرد. درصورتی چنین خواهد شد که پاره‌خطهای AB و CD نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، یا یکی کاملاً داخل دیگری باشد. درصورتی‌که این دو پاره‌خط همپوشانی داشته باشند، یعنی نقاط مشترکی داشته باشند ولی یکی کاملاً درون

دیگری نباشد، چنین نخواهد شد. اگر نقطهٔ وسط AB و نقطهٔ وسط CD برهم منطبق باشند، خط XY با AB موازی خواهد بود.

در مواردی که مسئله جواب دارد، جواب منحصر به فرد است.

تمرین

۱) نشان دهید اگر چهار نقطهٔ O، A، C و D همخط باشند و با در نظرگرفتن اندازه و علامت داشته باشیم $OA^۲ = OC \cdot OD$، آن‌گاه متقارن A نسبت به O بر مزدوج همساز A نسبت به C و D منطبق است.

۲) متوازی‌الاضلاع $MDOM'$ مفروض است. رأس O را به نقطهٔ وسط MM'، یعنی نقطهٔ C، وصل می‌کنیم. اگر نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ COD ضلع MD را در A و B قطع کنند، نشان دهید که $MD^۲ = MA \cdot MB$.

۳) اگر نقاط C و D پاره‌خط AB را، که نقطهٔ وسط آن O است، به‌طور همساز تقسیم کنند، ثابت کنید که

$$OC^۲ + OD^۲ = CD^۲ + ۲OA^۲$$

۴) اگر $(ABCD) = -۱$ و A' و B' مزدوجهای همساز D به‌ترتیب نسبت به دو نقطهٔ A، C و دو نقطهٔ B، C باشند، ثابت کنید که $(A'B'CD) = -۱$. راهنمایی. از رابطهٔ (f) (§۳۴۸) استفاده کنید.

۵) اگر $(ABCD) = -۱$ و M نقطهٔ وسط AB باشد نشان دهید که

$$\frac{۱}{CA \cdot CB} + \frac{۱}{DA \cdot DB} = \frac{۱}{MA \cdot MB}$$

۶) اگر $(ABCD) = -۱$، نشان دهید که

$$\frac{۱}{BC} = \frac{۱}{AB} + \frac{۱}{AD} + \frac{۱}{CD}$$

۷) اگر $(ABCD) = -۱$، و O نقطهٔ وسط پاره‌خط AB باشد، نشان دهید که $DA \cdot DB = DC \cdot DO$.

۸) اگر A، B، C، و D با همین ترتیب روی یک خط راست قرار داشته باشند، نشان دهید که مکان هندسی نقطه‌ای که پاره‌خطهای AB و CD از آن نقطه با زاویهٔ یکسان دیده می‌شوند دایره‌ای است که دو انتهای قطری از آن دو نقطه‌ای هستند که دو جفت نقطهٔ A، D؛ B، C را به‌طور همساز تقسیم می‌کنند.

۳۵۱. قضیه. $(ABCD) = -۱$ و نقطهٔ O خارج از خط AB مفروض‌اند، اگر خطی که از B به‌موازات OA رسم می‌شود، OC و OD را به‌ترتیب در P و Q قطع کند، داریم $PB = BQ$.

با توجه به دو مثلث متشابه OAC و PCB، و دو مثلث متشابه OAD و BQD (شکل ۹۵) داریم

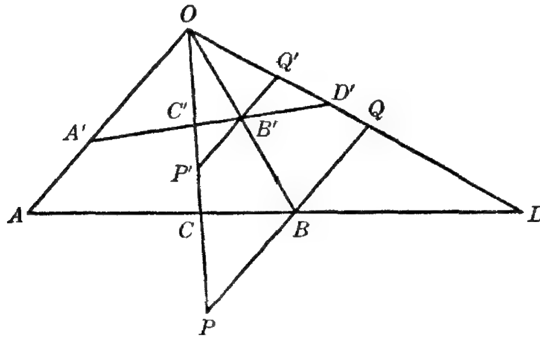
$$AO : PB = AC : CB \quad , \quad AO : BQ = AD : BD \qquad \text{(p)}$$

و چون $(ABCD) = -۱$، طرفهای راست این دو تساوی برابرند؛ پس $PB = BQ$.

۳۵۲. قضیهٔ عکس. چهار نقطهٔ همخط A، B، C، و D و نقطهٔ O خارج این خط مفروض‌اند. اگر خطی که از B به‌موازات OA رسم می‌شود، OC و OD را به‌ترتیب در P و Q قطع کند، و $PB = BQ$، آن‌گاه $(ABCD) = -۱$.

با توجه به مثلثهای متشابه رابطهٔ (p) را داریم، و چون $PB = BQ$، طرفهای چپ تساویهای (p) برابرند؛ پس طرفهای راست این تساویها نیز برابرند؛ و در نتیجه $(ABCD) = -۱$.

۳۵۳. قضیه. $(ABCD) = -۱$ و نقطهٔ O خارج خط AB مفروض‌اند. هر موربی چهار خط OA، OB، OC و OD را در چهار نقطهٔ همساز قطع می‌کند.



شکل۹۵

فرض کنید $A'B'C'D'$ (شکل ۹۵) یک مورب باشد و خطوطی که از B و B' به‌موازات OA رسم می‌شوند، OC را به‌ترتیب در P، Q و OD را به‌ترتیب در P'، Q' قطع کنند. با توجه به مثلثهای متشابه داریم

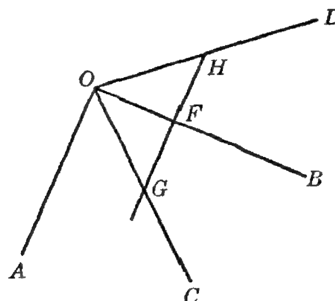
$$PB : P'B' = OB : OB' = BQ : B'Q'$$

حال چون $(ABCD) = -۱$، داریم (§۳۵۱) $PB = BQ$؛ پس $P'B' = B'Q'$، و بنابراین، $(A'B'C'D') = -۱$(§۳۵۲).

۳۵۴. چند تعریف. چهار خط همرس OA، OB، OC، و OD را که توسط یک مورب، و در نتیجه توسط هر موربی (§۳۵۳)، در چهار نقطهٔ همساز قطع شوند، یک دسته خط همساز می‌نامیم. هریک از این چهار خط را یک شعاع، و O را مرکز یا رأس این دسته خط همساز می‌نامیم؛ OA و OB، و همچنین OC و OD را دو شعاع همساز، و OC و OD را مزدوجهای همساز نسبت به OA و OB می‌نامیم، یا می‌گوییم که OC و OD، OA و OB را به‌صورت همساز تقسیم می‌کنند. دسته خط همساز را غالباً به‌صورت $O(ABCD) = -۱$، یا $O(AB, CD)$ نشان می‌دهند.

۳۵۵. قضیه. اگر دو شعاع همساز از یک دسته خط همساز برهم عمود باشند، این دو شعاع نیمسازهای دو زاویه‌ای هستند که توسط دو شعاع دیگر تشکیل می‌شوند.

$O(ABCD) = -۱$ (شکل ۹۶) مفروض است. فرض کنید یک خط موازی با OA خطوط OB، OC، و OD را به‌ترتیب در F، G، و H قطع کند. داریم $GF = FH$(§۳۵۱)، و اگر OA بر OB عمود باشد، مثلث OGH متساوی‌الساقین است؛ بنابراین قضیه ثابت می‌شود.



شکل۹۶

۳۵۶. قضیه. اگر $(ABCD) = -1$ و $(A'B'C'D') = -1$، و خطوط AA'، BB'، و CC' یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع کنند، DD' از O می‌گذرد.

چون $(ABCD) = -1$، نقطهٔ برخورد خط OD با خط $A'B'$ مزدوج همساز C' نسبت به A' و B' است، و بنابراین، بر D' منطبق است؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

۳۵۷. نتیجه. اگر $(ABCD) = -1$، $(AB'C'D') = -1$، و خطوط AB و AB' دو خط متمایز باشند، خطوط BB'، CC' و DD' همرس خواهند بود.

تمرین

۱) مزدوج همساز شعاع OC نسبت به شعاعهای OA و OB را رسم کنید.

۲) ثابت کنید که در مثلث ABC، $A(OHII_b) = -1$.

۳) نشان دهید که روی یک خط در حالت کلی یک نقطه وجود دارد، به‌طوری که خطوطی که از آن نقطه به دو نقطهٔ مفروض رسم می‌شوند، زاویه‌ای تشکیل دهند که خط مفروض نیمساز آن باشد.

۴) $(ABCD) = -1$ مفروض است. عمودهایی که در C و D بر CD رسم می‌شوند، موربی را که از A می‌گذرد در P و Q قطع می‌کنند. نشان دهید که AB نیمساز PBQ است.

۵) ثابت کنید که (الف) خطوطی که از یک نقطهٔ مفروض به موازات چهار خط یک دسته خط همساز رسم می‌شوند، یک دسته خط همساز تشکیل می‌دهند؛ (ب) عمودهایی که از یک نقطهٔ مفروض بر چهار شعاع یک دسته خط همساز رسم می‌شوند، یک دسته خط همساز تشکیل می‌دهند؛ (ج) متقارنهای چهار شعاع یک دسته خط همساز نسبت به یک محور مفروض، یک دسته خط همساز تشکیل می‌دهند. راهنمایی. از اصل بر هم نهی استفاده کنید.

۶) نشان دهید خطوطی که نقطه‌ای روی دایره را به دو انتهای وتری از دایره وصل می‌کنند، قطر عمود بر آن وتر را به‌طور همساز تقسیم می‌کنند.

۷) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، AE را به موازات BD رسم می‌کنیم؛ نشان دهید که $A(ECBD) = -1$.

۸) اگر A'، B'، و C' نقاط وسط اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید که $A'A$ مزدوج همساز $A'C$ نسبت به $A'B'$ و $A'C'$ است.

۹) AD و AA' به ترتیب ارتفاع و میانهٔ مثلث ABC هستند؛ خطوطی که از A' به موازات AB و AC رسم می‌شوند AD را در P و Q قطع می‌کنند؛ نشان دهید که $(ADPQ) = -1$.

۱۰) با استفاده از نمادهای متداول که برای مثلث ABC به کار می‌رود، اگر DF پاره‌خط BE را در K قطع کند، نشان دهید که $(BHKE) = -1$؛ همچنین اگر EF ضلع BC را در M قطع کند، نشان دهید که $(BCDM) = -1$.

۱۱) از یک نقطهٔ مفروض موربی رسم کنید که سه نقطهٔ تلاقی آن با سه خط مفروض (چه همرس باشند، چه نباشند) با نقطهٔ مفروض یک گسترهٔ همساز به وجود آورند.

۱۲) خطی که در نقطهٔ C بر یک دایره مماس می‌شود، امتداد قطر AB را در T قطع می‌کند؛ ثابت کنید که مماس دیگری که از T بر دایره رسم می‌شود توسط CA، CB، و CT و نقطهٔ تماس آن خط با دایره به صورت همساز تقسیم می‌شود.

۱۳) دایره‌ای که میانهٔ AA' از مثلث ABC قطر آن‌است دایرهٔ محیطی مثلث را در L قطع می‌کند؛ اگر AD ارتفاع مثلث باشد، نشان دهید که $A(LDBC) = -1$.

تمرینهای تکمیلی

۱) سه نقطهٔ همخط A، B، و C مفروض‌اند. نقاط A'، B'، و C' طوری رسم شده‌اند که $(AA'BC) = -۱$، $(BB'CA) = -۱$، $(CC'AB) = -۱$. ثابت کنید که همچنین، $(A'AB'C') = -۱$، $(B'BC'A') = -۱$، و $(C'CA'B') = -۱$.

۲) دو خط ثابت OX و OY مفروض‌اند. مورب متغیری که از نقطهٔ ثابت A روی OX می‌گذرد OY را در B قطع می‌کند، و دایرهٔ (B, BO) خط AB را در C و D قطع می‌کند. نشان دهید مکان هندسی نقطهٔ M، به طوری که $(AMCD) = -۱$، یک دایره است.

۳) دو نقطهٔ متغیر P و Q را روی قاعدهٔ BC ازمثلث ABC طوری می‌گیریم که $(BCPQ) = -۱$. نشان دهید مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APQ یک خط راست است.

۴) اضلاع AB و AC از مثلث ABC روی خطوطی که از مراکز سه مماس I و I_a به موازات ضلع BC رسم می‌شوند، پاره‌خطهای DE و FG را جدا می‌کنند. نشان دهید که

$$\frac{۲}{BC} = \frac{۱}{DE} + \frac{۱}{FG}$$

۵) موربی که از رأس A در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌گذرد،قطر BD و اضلاع BC و CD را در نقاط E، F، و G قطع می‌کند. نشان دهید که

$$\frac{۱}{AE} = \frac{۱}{AF} + \frac{۱}{AG}$$



دایره

الف. نقاط وارون

۳۵۸. تعریف. دو نقطهٔ همخط با مرکز یک دایره را که حاصل‌ضرب فاصله‌هایشان از مرکز دایره با مربع شعاع دایره برابر باشد نقاط وارون نسبت به آن دایره، یا برای آن دایره می‌نامند (شکل ۹۷).

دو نقطهٔ وارون در یک طرف مرکز دایره قرار دارند.

از دو نقطهٔ وارون یکی درون دایره و دیگری بیرون دایره قرار دارد.

اگر نقطه‌ای روی دایره در نظر گرفته شود، وارون آن بر خود نقطه منطبق است.

۳۵۹. قضیه. دو نقطهٔ وارون، قطر متناظر را به‌طور همساز تقسیم می‌کنند، و برعکس.

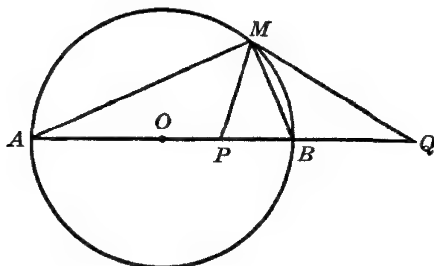
فرض کنید P و Q (شکل ۹۷) دو نقطهٔ وارون، و A و B دو سر قطری باشند که از P و Q می‌گذرد و O مرکز دایره باشد. بنابر فرض، داریم $OP \cdot OQ = OB^۲$؛ پس $(ABPQ) = -۱$ (§۳۴۶).

برعکس، اگر $(ABPQ) = -۱$، داریم $OP \cdot OQ = OB^۲$ (§۳۴۷)؛ پس نقاط P و Q نسبت به دایره وارون هستند.

۳۶۰. قضیه. نسبت فاصله‌های یک نقطهٔ متغیر روی دایره از دو نقطهٔ وارون مفروض، مقداری ثابت است.

فرض کنید نقاط وارون P و Q (شکل ۹۷) روی قطر AB قرار داشته باشند. گسترهٔ $(ABPQ)$ همساز است (§۳۵۹)، پس $M(ABPQ)$ یک دسته خط همساز است، که در آن M نقطهٔ دلخواهی از دایره است. $\angle AMB = ۹۰^\circ$؛ پس MA و MB نیمسازهای $\angle PMQ$ هستند (§۳۵۵) و بنابراین،

$$MP : MQ = PB : BQ$$



شکل۹۷

۳۶۱. تعریف. مثلثی که رأسهای آن پای عمودهایی هستند که از یک نقطهٔ مفروض بر اضلاع مثلث مفروضی رسم شده‌اند، مثلث پایی آن نقطه نسبت به مثلث مفروض، یا برای مثلث مفروض نامیده می‌شود.

۳۶۲. قضیه. (الف) مثلثهای پایی دو نقطهٔ وارون نسبت به دایرهٔ محیطی یک مثلث مفروض نسبت به آن مثلث، متشابه‌اند. (ب) برعکس، اگر مثلثهای پایی دو نقطه نسبت به یک مثلث مفروض متشابه باشند، آن دو نقطه نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث مفروض وارون یکدیگرند.

فرض کنید DEF و $D'E'F'$ مثلثهای پایی دو نقطهٔ P و P' نسبت به مثلث ABC باشند. در دو دایره‌ای که AP و AP' قطرشان هستند دو وتر EF و $E'F'$ (شکل ۹۸) با زاویهٔ یکسان A دیده می‌شوند؛ پس دو مثلث متساوی‌الساقینی که EF و $E'F'$ قاعدهٔ آنها، و مراکز دو دایرهٔ متناظر رأسهای مقابل قاعدهٔ آنها هستند متشابهند. پس،

$$EF : E'F' = AP : AP'$$

به‌طور مشابه،

$$FD : F'D' = BP : BP', DE : D'E' = CP : CP'$$

حال اگر P و P' نسبت به دایرهٔ ABC وارون باشند، طرفهای راست این نسبتها برابرند (§۳۶۰)؛ پس طرفهای چپ نیز برابرند، و حکم مستقیم قضیه ثابت می‌شود.

برعکس، اگر DEF و $D'E'F'$ متشابه باشند، طرفهای چپ این نسبتها برابرند؛ پس طرفهای راست نیز برابرند؛ در نتیجه با توجه به مکان هندسی ۱۱(§۱۱) نقاط P و P' قطری از دایرهٔ ABC را به‌طور همساز تقسیم می‌کنند، و عکس قضیه نیز ثابت می‌شود.

شکل۹۸

تمرین

۱) ثابت کنید که دو جفت نقطهٔ وارون نسبت به یک دایره یا همدایره‌اند یا همخط.

۲) از نقطهٔ P خارج از دایرهٔ مفروضی به‌مرکز O دو مماس برآن دایره رسم می‌شود. نشان دهید که وارون نقطهٔ تلاقی OP با خط واصل بین دو نقطهٔ تماس، نقطهٔ P است.

۳) اگر دایرهٔ (B) از A، مرکز دایرهٔ (A) بگذرد، و یک قطر (A) وتر مشترک دو دایره را در F و دایرهٔ (B) را مجدداً در G قطع کند، نشان دهید که نقاط F و G نسبت به دایرهٔ (A) وارون یکدیگرند.

۴) نشان دهید که (الف) اگر P و Q دو نقطهٔ وارون نسبت به دایره‌ای به مرکز O باشند. و M نقطهٔ دلخواهی از دایره باشد، مثلثهای OMP و OMQ متشابه‌اند؛ (ب) اگر R و S دو نقطهٔ وارون دیگر، و همخط با P و Q باشند، زاویه‌های PMR و QMS یا برابر یا مکمل‌اند.

۵) نشان دهید که (الف) دو خطی که نقطهٔ دلخواهی از دایره را به دو انتهای وتر دلخواهی از دایره وصل می‌کنند، قطر عمود برآن وتر را در دو نقطهٔ وارون قطع می‌کنند؛ (ب) دو خطی که از یک نقطهٔ دلخواه روی یک دایره به دو نقطهٔ وارون مفروض نسبت به آن دایره وصل می‌شوند، دایره را در دو انتهای وتری از دایره قطع می‌کنند که بر قطر شامل دو نقطهٔ وارون عمود است؛ (ج) چهارخطی که از دو انتهای یک وتر دایره به دو نقطهٔ وارون مفروض واقع بر قطری عمود برآن وتر، رسم می‌شوند، یکدیگر را دوبه‌دو، روی آن دایره قطع می‌کنند.

۶) اگر P و Q دو نقطهٔ وارون نسبت به یک دایره، و CD وتری عمود بر قطر شامل P و Q باشد، ثابت کنید که پاره‌خطهای CP و DQ از نقطهٔ دلخواه M برروی دایره با زاویه‌هایی دیده می‌شوند که یا برابرند یا مکمل.

ب. دایره‌های متعامد

۳۶۳. تعریف. دو دایره را متعامد می‌نامیم، اگر مربع خط‌المرکزین آنها با مجموع مربع شعاعهایشان برابر باشد.

۳۶۴. قضیه. (الف) در دو دایرهٔ متعامد، دو شعاعی که از یک نقطهٔ مشترک دو دایره می‌گذرند برهم عمودند. (ب) برعکس، اگر دو شعاعی که از یک نقطهٔ مشترک دو دایره می‌گذرند، برهم عمود باشند، دو دایره متعامدند.

۳۶۵. قضیه. (الف) اگر دو دایره متعامد باشند، دایره‌ای که خط‌المرکزین دو دایره قطر آن است، از نقاط مشترکشان می‌گذرد. (ب) برعکس، اگر دایره‌ای که خط‌المرکزین دو دایرهٔ مفروض قطر آن است، از نقاط مشترک دو دایره بگذرد، آن دو دایره متعامدند.

۳۶۶. قضیه. اگر دو دایره متعامد باشند، شعاع یکی از دو دایره که از نقطهٔ مشترک دو دایره می‌گذرد، بر دایرهٔ دیگر مماس است.

فرض کنید C یک نقطهٔ مشترک دو دایرهٔ متعامد (A) و (B) باشد. مماسی که در C بر (B) رسم می‌شود، بر شعاع BC عمود است؛ پس این مماس بر شعاع AC از دایرهٔ (A) منطبق است (۳۶۴§ الف).

۳۶۷. قضیهٔ عکس. دو دایرهٔ متقاطع مفروض‌اند. اگر شعاع یک دایره که از یک نقطهٔ مشترک دو دایره می‌گذرد بر دایرهٔ دوم مماس باشد، آن‌گاه دو دایره متعامدند.

دو شعاعی که از نقطهٔ مشترک مورد نظر می‌گذرند برهم عمودند، پس دو دایره متعامدند (۳۶۴§ ب).

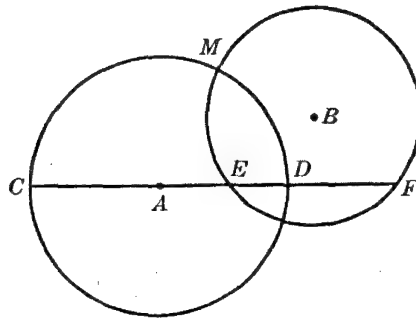
۳۶۸. قضیه. اگر دو دایره متعامد باشند، هر دو نقطه‌ای از یکی از آنها، که با مرکز دایرهٔ دوم همخط باشند، نسبت به دایرهٔ دوم وارون‌اند.

فرض کنید (A) و (B) (شکل ۹۹) دو دایرهٔ متعامد باشند. فرض کنید E و F دو نقطهٔ (B)، همخط با A، مرکز (A) و C و D دو انتهای قطر AEF از دایرهٔ (A) باشند.

اگر M یک نقطهٔ مشترک (A) و (B) باشد، داریم $AM^2 = AE \cdot AF$. ولی $AM = AC = AD$؛ پس $(CDEF) = -1$ (۳۴۷§)، و قضیه ثابت می‌شود (۳۵۹§).

۳۶۹. قضیهٔ عکس. اگر دو نقطهٔ یک دایره نسبت به دایرهٔ دیگری وارون باشند، آن‌گاه دو دایره متعامدند.

بنابر فرض، دو نقطهٔ E و F از دایرهٔ (B) (شکل ۹۹) با A همخط‌اند (۳۶۸§) و نسبت به (A)



شکل۹۹

وارون‌اند؛ بنابراین، $AC^{۲} = AE \cdot AF$؛ پس $AM^{۲} = AE \cdot AF$.

پس AM بر (B) مماس است؛ در نتیجه دو دایره متعامدند (§۳۶۷).

۳۷۰. نتیجه. اگر $(ABCD) = -۱$ ، دایره‌ای که AB قطر آن است با هر دایره‌ای که از C و D بگذرد متعامد است.

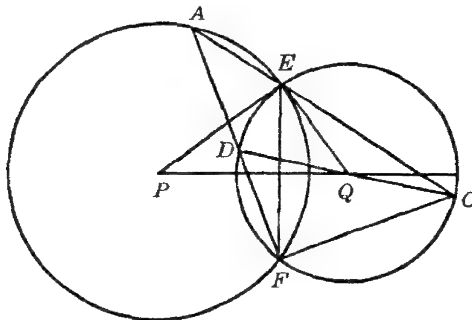
۳۷۱. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و با دایرهٔ مفروضی متعامد باشد.

دو نقطهٔ مفروض را A و B، و وارون یکی از آنها، مثلاً A، نسبت به دایرهٔ مفروض (O) را A' فرض کنید. A، B و A' دایرهٔ مطلوب (S) را تعیین می‌کنند.

مسئله در حالت کلی یک جواب دارد، زیرا B'، وارون B، نیز روی (S) قرار دارد (§۳۶۸).

اگر نقاط A و B با مرکز دایرهٔ (O) همخط باشند، مسئله بسته به این که A و B نسبت به (O) وارون هم باشند یا نباشند، یا بی‌نهایت جواب دارد، یا جواب ندارد.

۳۷۲. قضیه. دوخطی که از نقاط برخورد دو دایرهٔ متعامد به نقطه‌ای روی یکی از دایره‌ها رسم می‌شوند، دایرهٔ دیگر را در دو انتهای قطری از آن دایره قطع می‌کنند.



شکل۱۰۰

فرض کنید خطوط EA و FA خطوطی باشند که از E و F، نقاط برخورد دو دایرهٔ متعامد (P) و (Q)، به نقطهٔ A از (P) رسم شده‌اند، و (Q) را مجدداً در C و D قطع کنند (شکل ۱۰۰)؛ داریم

$$\angle EAF = \frac{۱}{۲}\angle EPF = \angle EPQ \quad , \quad \angle ECF = \frac{۱}{۲}\angle EQF = \angle EQP$$

پس،

$$\angle EAF + \angle ECF = \angle EPQ + \angle EQP = 90^\circ$$

بنابراین، زاویهٔ F از مثلث CAF قائمه است. پس CD از نقطهٔ F با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود، و قضیه ثابت شده است.

تمرین

۱) دایره‌ای به مرکز نقطه‌ای مفروض رسم کنید که با دایرهٔ مفروضی متعامد باشد.

۲) نشان دهید اگر نقاط برخورد و مراکز دو دایره، رأسهای یک چهارضلعی محاطی باشند، آن‌گاه دو دایره متعامدند.

۳) دو دایرهٔ متقاطع و دو نقطه را، هرکدام روی یکی از دایره‌ها، به‌طوری که در دو طرف وتر مشترک باشند در نظر بگیرید. نشان دهید اگر مجموع دو زاویه‌ای که وتر مشترک از این نقاط با آن زاویه‌ها دیده می‌شود 90° یا 270° باشد دو دایره متعامدند.

۴) دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ مفروضی بگذرد و با دو دایرهٔ مفروض متعامد باشد.

۵) نشان دهید که حاصل‌ضرب شعاعهای دو دایرهٔ متعامد برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول وتر مشترک آنها در طول خط‌المرکزین آنها.

۶) دایره‌ای متعامد با دایره‌ای مفروض رسم کنید به‌طوری‌که یک سوم محیط دایرهٔ مفروض درون آن قرار گیرد.

۷) (الف) سه دایره رسم شده‌اند که رأسهای مثلث مفروض ABC مراکز آنها هستند و دوبه‌دو متعامدند. شعاع دایره‌ها را برحسب طول اضلاع مثلث به‌دست آورید. (ب) نشان دهید که مربع شعاع این دایره‌ها به‌ترتیب برابرند با $AH \cdot AD$، $BH \cdot BE$، و $CH \cdot CF$.

۸) نشان دهید که در مثلث ABC (الف) دایره‌هایی که به قطر AH و BC رسم می‌شوند متعامدند؛ (ب) دایرهٔ IBC با دایره‌ای که به قطر I_bI_c رسم می‌شود متعامد است.

۹) نشان دهید مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از یک نقطهٔ مفروض می‌گذرند و با دایرهٔ مفروضی متعامدند، یک خط راست است.

۱۰) نشان دهید که اگر AB قطری از دایره‌ای به مرکز O، و M نقطهٔ دلخواهی از آن دایره باشد، دایره‌های AMO و BMO متعامدند.

۱۱) از یک نقطهٔ مفروض خارج از دایره‌ای مفروض قاطعی رسم کنید به‌طوری که حاصل‌ضرب فاصلهٔ نقاط برخورد آن با دایره از قطری که از نقطهٔ مفروض می‌گذرد مقدار مفروضی باشد.

۱۲) (الف) دو قطر عمود برهم از دو دایرهٔ متعامد مفروض‌اند. نشان دهید خطهایی که از یک سر یک قطر به دو سر قطر دیگر رسم می‌شوند، از نقاط مشترک دو دایره می‌گذرند؛ (ب) نشان دهید که چهار نقطهٔ انتهایی دو قطر عمود برهم از دو دایرهٔ متعامد یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند، و برعکس.

ج. قطب و قطبی

۳۷۳. قضیه. مزدوج همساز یک نقطهٔ ثابت نسبت به دو نقطهٔ متغیر که روی دایرهٔ مفروضی قرار دارند و با نقطهٔ ثابت همخط‌اند، خط راستی را می‌پیماید.

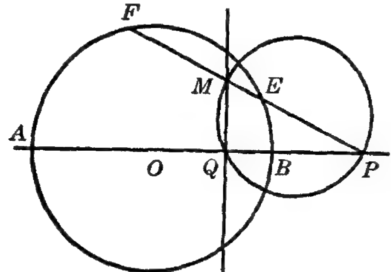
روی دایرهٔ مفروض (O) دو نقطهٔ E و F همخط با نقطهٔ ثابت مفروض P در نظر بگیرید (شکل ۱۰۱ الف و ب). فرض کنید M مزدوج همساز P نسبت به E و F باشد. اگر AB قطری از دایرهٔ (O) باشد که از P می‌گذرد، فرض کنید Q پای عمودی باشد که از M بر قطر AB رسم می‌شود.

PM قطر دایرهٔ PMQ است، و دو نقطهٔ E و F خط PM را به‌طور همساز تقسیم می‌کنند؛ پس

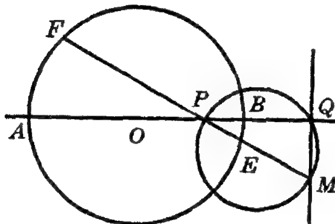
دایره‌های (O) و PQM متعامدند (§۳۶۹). در نتیجه دو نقطهٔ P و Q که قطر AB از دایرهٔ (O) در این نقاط دایرهٔ PMQ را قطع می‌کند، نسبت به دایرهٔ (O) وارون یکدیگرند، یعنی نقطهٔ Q مستقل از انتخاب دو نقطهٔ E و F روی دایرهٔ (O)، ثابت است؛ به‌این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۳۷۴. تعریف. خط MQ (§۳۷۳) را خط قطبی نقطهٔ P نسبت به دایره، یا برای دایره، و نقطهٔ P را قطب خط MQ می‌نامند.

۳۷۵. نتایج. (الف) خط قطبی یک نقطهٔ مفروض نسبت به یک دایره، بر قطری از دایره که از آن نقطهٔ مفروض می‌گذرد عمود است، و نقطهٔ برخورد وارون آن نقطه نسبت به دایره است.



شکل۱۰۱ (الف)



شکل۱۰۱ (ب)

(ب) قطب یک خط مفروض نسبت به یک دایره، وارون پای عمودی است که از مرکز دایره برآن خط رسم می‌شود.

۳۷۶. ملاحظهٔ ۱. خط قطبی یک نقطه از دایره، خطی است که در آن نقطه بر دایره مماس می‌شود، و قطب خط مماس بر دایره، نقطهٔ تماس خط با دایره است.

زیرا وارون یک نقطهٔ واقع بر دایره بر خود آن نقطه منطبق است.

۳۷۷. ملاحظهٔ ۲. هر نقطه‌ای از صفحهٔ یک دایره نسبت به آن دایره یک خط قطبی دارد به‌جز مرکز دایره.

هر خطی واقع در صفحهٔ یک دایره، نسبت به‌آن دایره یک قطب دارد، به‌جز خطهایی که از مرکز دایره می‌گذرند.

۳۷۸. ملاحظهٔ ۳. اگر قطب داخل دایره باشد، خط قطبی دایره را قطع نمی‌کند.

اگر قطب خارج دایره باشد. خط قطبی آن خطی است که از نقاط تماس مماسهایی که از آن نقطه بر دایره رسم می‌شوند، می‌گذرد.

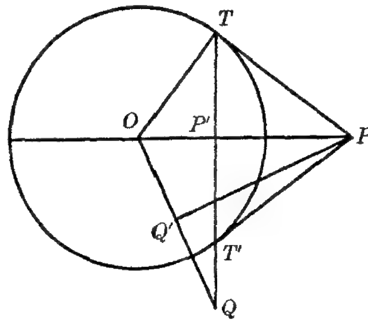
در واقع، اگر محل برخورد وتر TT' را، که از دو نقطهٔ تماس می‌گذرد، با قطر OP، که از قطب P می‌گذرد، P' بنامیم (شکل ۱۰۲)، P' وارون P نسبت به دایره است، زیرا در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTP داریم $OT^{2} = OP \cdot OP'$.

۳۷۹. قضیه. اگر خط قطبی نقطهٔ P از نقطهٔ Q بگذرد خط قطبی نقطهٔ Q هم از نقطهٔ P خواهد گذشت.

اگر خط PQ دایره را در دو نقطهٔ C و D قطع کند، برقراری قضیه تقریباً روشن است. در واقع اگر خط قطبی نقطهٔ P از Q بگذرد، داریم $(PQCD) = -1$ (§۳۷۳)؛ پس P مزدوج همساز Q نسبت به C و D است و خط قطبی نقطهٔ Q هم از P خواهد گذشت.

اثبات زیر، چه خط PQ دایره را قطع کند و چه قطع نکند، معتبر است.

دو نقطهٔ P و Q، و P' و Q'، وارون آنها نسبت به دایرهٔ (O, R)، چهار نقطهٔ همدایره‌اند، زیرا



شکل ۱۰۲

$OP \cdot OP' = R^۲ = OQ \cdot OQ'$؛ پس زاویه‌های $PP'Q$ و $PQ'Q$ در چهارضلعی محاطی $PQQ'P'$ (شکل ۱۰۲) برابرند. QP' خط قطبی نقطهٔ P است، زیرا از Q و وارون P، یعنی P'، می‌گذرد. پس $\angle PP'Q = ۹۰^\circ$ و در نتیجه، $\angle PQ'Q = ۹۰^\circ$. پس خط PQ' از وارون Q، یعنی Q'، می‌گذرد و بر OQ عمود است، یعنی PQ' خط قطبی نقطهٔ Q است (§۳۷۵)، و چون PQ' از P می‌گذرد، قضیه ثابت شده است.

۳۸۰. تعریف. دو نقطه را که خط قطبی یکی از دیگری بگذرد، نقاط مزدوج نسبت به دایره می‌نامند. هر نقطهٔ مفروض، بی‌نهایت نقطهٔ مزدوج دارد، که عبارت‌اند از همهٔ نقاط واقع بر خط قطبی آن نقطه.

اگر دو نقطهٔ مزدوج با مرکز دایره همخط باشند، آن‌گاه نسبت به دایره وارون یکدیگرند.

۳۸۱. قضیه. اگر قطب خط p روی خط q باشد، آن‌گاه قطب خط q نیز روی خط p قرار دارد.

فرض کنید P و Q به‌ترتیب قطبهای دو خط p و q باشند. بنابر فرض، P روی q است، یعنی خط قطبی Q از نقطهٔ P می‌گذرد؛ پس (§۳۷۹) خط قطبی P، یعنی خط p، نیز از Q می‌گذرد.

۳۸۲. تعریف. دو خط را که قطب هریک روی دیگری قرار دارد خطوط مزدوج نسبت به دایره می‌نامند. هر خط مفروض، بی‌نهایت خط مزدوج دارد، که عبارت‌اند از همهٔ خطوطی که از قطب آن خط مفروض می‌گذرند.

۳۸۳. قضیه. (الف) خطهای قطبی همهٔ نقاط یک خط مفروض، از نقطهٔ ثابتی، که قطب خط مفروض است، می‌گذرند. (ب) قطبهای همهٔ خطوطی که از یک نقطهٔ مفروض می‌گذرند، روی یک خط راست، که خط قطبی نقطهٔ مفروض است، قرار دارند.

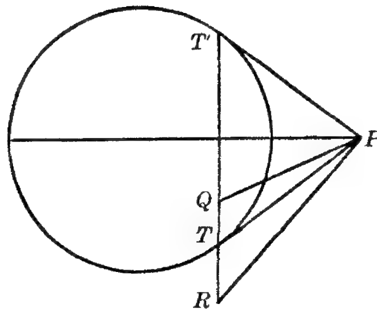
۳۸۴. نتیجه. (الف) قطب هر خط نقطهٔ برخورد خطهای قطبی دو نقطه از آن خط است.

(ب) خط قطبی هر نقطه خطی است که از قطبهای دو خط گذرنده از آن نقطه، می‌گذرد.

۳۸۵. قضیه. اگر دو خط مزدوج یکدیگر را خارج از دایره قطع کنند، این دو خط نسبت به دو مماسی که از نقطهٔ تلاقی آنها بر دایره رسم می‌شوند، مزدوج همسازند.

فرض کنید دو خط مزدوج PQ و PR وتر TT' را در Q و R قطع کنند (شکل ۱۰۳)، که T و T' نقاط تماس مماسهایی هستند که از P بر دایره رسم می‌شوند. قطب PR روی PQ (§۳۸۲) و روی خط قطبی P، یعنی TT'، (§۳۷۹) قرار دارد، زیرا PR از P می‌گذرد؛ بنابراین، Q قطب PR است. پس $(TT'QR) = -۱$ (§۳۷۳) و بنابراین، $P(TT'QR)$ یک دسته خط همساز است.

۳۸۶. قضیه. اگر دو دایره متعامد باشند، دو نقطهٔ انتهایی هر قطری از یک دایره نسبت به دایرهٔ دیگر مزدوج‌اند.

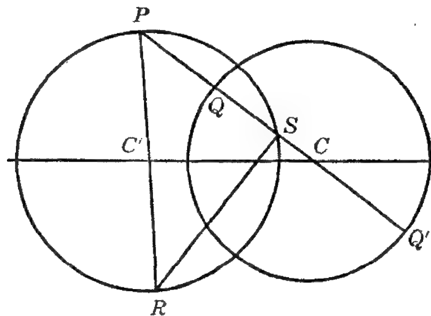


شکل ۱۰۳

خط PC (شکل ۱۰۴) که از P به‌مرکز دایرهٔ (C) رسم می‌شود، (C') را مجدداً در وارون P نسبت به (C)، یعنی نقطهٔ S قطع می‌کند (§۳۶۸)؛ پس خط قطبی P نسبت به (C) در S بر PC عمود است و (C') را مجدداً در R که انتهای دیگر قطری از (C') است که از P می‌گذرد، قطع می‌کند.

۳۸۷. قضیهٔ عکس. اگر دو نقطهٔ انتهایی قطری از یک دایره نسبت به دایره‌ای دیگر مزدوج باشند، آن دو دایره متعامدند.

بنابر فرض، خط قطبی P نسبت به (C) از نقطهٔ R می‌گذرد (شکل ۱۰۴) و همچنین، بر PC عمود است (§۳۷۵)؛ پس این خط قطبی بر RS منطبق است، یعنی S وارون P نسبت به (C) است (§۳۷۵). در نتیجه دو دایره متعامدند (§۳۶۹).



شکل ۱۰۴

۳۸۸. تعریف. یک مثلث را نسبت به یک دایره خود مزدوج یا مزدوج، یا خود قطبی یا قطبی می‌نامند اگر هر ضلع مثلث خط قطبی رأس مقابل آن ضلع باشد.

به‌سادگی می‌توان دید که با مفروض بودن دایرهٔ (O) بی‌نهایت مثلث از این نوع را می‌توان رسم کرد. فرض کنید P نقطهٔ دلخواهی از صفحه، و Q نقطهٔ دلخواهی روی خط p، یعنی خط قطبی P نسبت به (O) باشد؛ q، یعنی خط قطبی Q نیز از P می‌گذرد (§۳۷۹) و p را در رأس سوم مثلث مطلوب PQR، یعنی R، قطع می‌کند. دو خط RQ و RP به‌ترتیب خطهای قطبی P و Q هستند، و قطب PQ بر R منطبق است (§۳۸۴ الف).

۳۸۹. ملاحظه. از سه رأس یک مثلث قطبی، یکی داخل دایره و دو رأس دیگر خارج دایره قرار دارند.

اگر رأس P از مثلث PQR، که نسبت به دایرهٔ (O) قطبی است، داخل (O) باشد، دو رأس دیگر Q

و R روی خط قطبی P، و بنابراین خارج دایرهٔ (O) قرار دارند (§۳۷۸).

اگر P را خارج (O) بگیریم، خط قطبی P دایرهٔ (O) را در دو نقطه مانند E و F، قطع می‌کند (§۳۷۸). رأسهای Q و R نسبت به (O) مزدوج‌اند؛ بنابراین توسط E و F به‌صورت همساز تقسیم می‌شوند، و در نتیجه، یکی از آنها داخل و دیگری خارج دایرهٔ (O) قرار دارد.

۳۹۰. قضیه. اگر مثلثی نسبت به یک دایره قطبی باشد، مرکز دایره بر مرکز ارتفاعی مثلث منطبق است.

اگر مثلث PQR نسبت به دایرهٔ (O) قطبی باشد، عمودهایی که از P، Q، و R بر خطوط قطبی این نقاط، یعنی QR، RP و PQ رسم می‌شوند از مرکز (O) می‌گذرند (§۳۷۵)؛ پس قضیه ثابت شده است.

۳۹۱. مسئله. مثلثی مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که مثلث نسبت به آن قطبی باشد.

مرکز دایرهٔ مطلوب باید بر مرکز ارتفاعی مثلث مفروض ABC منطبق باشد (§۳۹۰)؛ این نقطه را H می‌نامیم. رأس A و پای ارتفاع گذرنده از A، یعنی D، دو نقطهٔ وارون نسبت به دایره مطلوب‌اند؛ به‌همین ترتیب، B و E و همچنین، C و F نقاط وارون نسبت به این دایره‌اند؛ پس مربع شعاع دایرهٔ مطلوب باید با هریک از حاصل‌ضربهای زیر برابر باشد:

$$HA \cdot HD \quad , \quad HB \cdot HE \quad , \quad HC \cdot HF \qquad (1)$$

و این حاصل‌ضربها در هر مثلثی برابرند (§۱۷۷). ولی نقاط وارون A و D؛ B و E؛ و C و F باید در یک طرف H، یعنی مرکز دایرهٔ مطلوب باشند (§۳۵۸)، و این شرط تنها درصورتی برقرار می‌شود که ABC زاویهٔ منفرجه داشته باشد.

پس اگر هر سه زاویهٔ مثلث ABC حاده باشند، مسئله جواب ندارد. اگر مثلث ABC زاویهٔ منفرجه داشته باشد، مسئله یک جواب منحصر به فرد دارد، مرکز دایرهٔ مطلوب (H) مرکز ارتفاعی مثلث ABC است و مربع شعاع (H) با هریک از حاصل‌ضربهای (۱) برابر است.

۳۹۲. تعریف. دایرهٔ (H)(§۳۹۱) را دایرهٔ قطبی، یا دایرهٔ مزدوج مثلث ABC می‌نامند

تمرین

۱) نشان دهید زاویهٔ بین دو خط برابر است با زاویه‌ای که پاره‌خط واصل بین قطبهای آنها نسبت به یک دایرهٔ مفروض، از مرکز آن دایره با آن زاویه دیده می‌شود.

۲) نشان دهید مکان هندسی نقطه‌ای که خطهای قطبی آن نسبت به دو دایرهٔ مفروض برهم عمودند، دایره‌ای است که خط‌المرکزین دو دایره قطر آن است.

۳) (الف) TP و TQ در دو انتهای وتر PQ از یک دایره برآن دایره مماس‌اند. خطی که در نقطهٔ دلخواه R بر دایره مماس است، PQ را در S قطع می‌کند؛ ثابت کنید که TR خط قطبی S است. (ب) دو نقطهٔ ثابت R و S مفروض‌اند؛ دایرهٔ دلخواه (O) را طوری رسم می‌کنیم که در R بر RS مماس باشد، و از S قاطع دلخواهی رسم می‌کنیم تا (O) را در P و Q قطع کند. اگر مماسهایی که در P و Q بر (O) رسم می‌شوند خط RS را در U و V قطع کنند، نشان دهید که $\frac{1}{RV} + \frac{1}{RU}$ مقداری ثابت، مستقل از دایرهٔ (O) و قاطع RPQ است.

۴) اگر خطهای قطبی رأسهای مثلث (P) نسبت به دایرهٔ (O) اضلاع مثلث (Q) باشند، نشان دهید که خطهای قطبی رأسهای مثلث (Q) نسبت به دایرهٔ (O)، اضلاع مثلث (P) هستند.

۵) از یک نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید که از مرکز دور از دسترس دایره‌ای مفروض بگذرد.

۶) دایرهٔ متغیری از نقطهٔ ثابت C می‌گذرد، و دو نقطهٔ ثابت H و K نسبت به دایره مزدوج‌اند؛ نشان دهید مرکز دایره روی خط راستی قرار دارد که بر خط واصل بین C و نقطهٔ وسط پاره‌خط HK عمود است.

۷) روی یک خط مفروض دو نقطه بیابید که از نقطهٔ مفروضی روی آن خط همفاصله، و نسبت به دایرهٔ مفروضی مزدوج باشند.

۸) نشان دهید که (الف) دو قطب وتر مشترک دو دایرهٔ متعامد نسبت به این دایره‌ها بر مراکز این دو دایره منطبق‌اند؛ (ب) اگر AB و CD دو پاره‌خط همساز باشند، مزدوج همساز نقطهٔ وسط AB نسبت به C و D بر مزدوج همساز نقطهٔ وسط CD نسبت به A و B منطبق است.

۹) نشان دهید که دایرهٔ قطبی یک مثلث، اضلاع مثلث را به‌صورت همساز قطع می‌کند.

۱۰) ثابت کنید قطب خطی که از دو نقطهٔ مزدوج می‌گذرد، مرکز ارتفاعی مثلثی است که این دو نقطهٔ مفروض و مرکز دایره رأسهای آن هستند.

۱۱) X نقطهٔ دلخواهی روی ضلع BC از مثلث ABC است. نشان دهید دایره‌ای که AX قطر آن‌است با دایرهٔ قطبی مثلث متعامد است.

۱۲) خطی دو دایره را در چهار نقطه قطع می‌کند. روی این خط دو نقطه بیابید، به‌طوری‌که هرکدام نقطهٔ برخورد دو خط قطبی نقطهٔ دیگر نسبت به دو دایرهٔ مفروض باشد.

۱۳) بی‌نهایت مثلث می‌توان رسم کرد که نسبت به یک دایرهٔ مفروض قطبی باشند و نقطهٔ مفروضی رأس مشترک همهٔ آنها باشد. نشان دهید که (الف) مرکز ثقل این مثلثها روی یک خط راست قرار دارد؛ (ب) مرکز ارتفاعی این مثلثها نقطهٔ ثابتی است؛ (ج) مراکز دایره‌های محیطی آنها روی یک خط ثابت قرار دارد.

۱۴) AB و CD دو وتر از یک دایره و P و Q نقاط وسط این وترها هستند. ثابت کنید که اگر AB نیمساز زاویهٔ CPD باشد، آن‌گاه CD نیمساز زاویهٔ AQB است.

۱۵) تصویر نقطهٔ M واقع بر دایرهٔ مفروض (O) روی دو قطر عمود برهم u و v، به‌ترتیب، نقاط A و B هستند. قطب خط AB نسبت به دایرهٔ (O) را بر u و v تصویر می‌کنیم. نشان دهید خطی که از این دو تصویر می‌گذرد بر دایره مماس است.

۱۶) P و Q دو نقطهٔ دلخواه هستند و PM و QN عمودهایی هستند که از هرکدام بر خط قطبی دیگری نسبت به دایره‌ای به مرکز O رسم می‌شوند، نشان دهید که $OP : PM = OQ : QN$.

تمرینهای تکمیلی

۱) نشان دهید که (الف) دو خطی که در نقاط برخورد عمودمنصف یک ضلع مثلثی با دو ضلع دیگر مثلث براین عمودمنصف عمود می‌شوند، از رأسهای مثلث مماسی مثلث مفروض می‌گذرند؛ (ب) خط AI اضلاع XY و XZ را در دو نقطهٔ P و Q که نسبت به دایرهٔ محاطی داخلی $XYZ = (I)$ واارون یکدیگرند قطع می‌کند و عمودهایی که در P و Q بر AI رسم می‌شوند از دو رأس B و C از مثلث مفروض می‌گذرند.

۲) عمودهایی از مرکز ارتفاعی یک مثلث بر خطهایی که رأسهای مثلث را به نقطهٔ مفروضی وصل می‌کنند رسم می‌کنیم؛ نشان دهید سه نقطه‌ای که از تقاطع هریک از این عمودها با ضلع روبروی رأس متناظر آن عمود حاصل می‌شوند همخط‌اند.

۳) از هر رأس یک مثلث عمودی بر خطی که وسط ضلع مقابل این رأس را به‌مرکز ارتفاعی مثلث وصل می‌کند رسم می‌کنیم تا این ضلع را قطع کند. نشان دهید سه نقطهٔ به‌دست آمده روی خط راستی عمود

بر خط اویلر مثلث قرار دارند.

۴) نشان دهید عمودهایی که در مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی بر سه نیمساز داخلی این مثلث رسم می‌شوند، اضلاع متناظر را در سه نقطه روی خطی که بر خط واصل بین مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث عمود است قطع می‌کنند.

۵) A'، B' و C' نقاط برخورد موربی با اضلاع BC، CA، و AB از مثلث ABC، و H مرکز ارتفاعی این مثلث است. ثابت کنید عمودهایی که از A، B، و C به‌ترتیب بر خطوط HA'، HB' و HC' رسم می‌شوند همرس‌اند، و نقطهٔ برخوردشان روی عمودی واقع است که از H بر $A'B'C'$ رسم می‌شود.

۶) نشان دهید که خطوط قطبی یک گسترهٔ همساز، یک دسته خط همساز تشکیل می‌دهند، و برعکس.

۷) DB و DC مماسهایی بر دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC هستند. از نقطهٔ برخورد این دو مماس خطی به موازات خطی که از A بر (O) مماس است رسم می‌کنیم. نشان دهید که اگر این خط AB و AC را در E و F قطع کند، D وسط EF است.

۸) (الف) دایرهٔ (P) در نقاط E و F بر اضلاع AB و AC از مثلث ABC مماس است. نشان دهید خط EF، عمودی که از P، مرکز دایرهٔ (P)، بر BC رسم می‌شود، و میانه‌ای از مثلث ABC که از رأس A می‌گذرد، همرس‌اند؛ (ب) X، Y، Z و X_a، Y_a، Z_a نقاط تماس اضلاع BC، CA، و AB از مثلث ABC به‌ترتیب با دایرهٔ محاطی داخلی (I) و دایرهٔ محاطی خارجی (I_a) هستند. نشان دهید که نقاط برخورد YZ با دو شعاع IX و I_aX_a و رأس A، و همچنین نقاط برخورد Y_aZ_a با دو شعاع IX و I_aX_a و وسط ضلع BC، همخط‌اند.

د. مرکز تشابه

۳۹۳. مسئلهٔ عکس. با مفروض بودن یک دایره، یک مرکز تجانس و یک نسبت تجانس، دایره‌ای متجانس با دایرهٔ مفروض رسم کردیم (§۴۷). دیدیم که نسبت شعاعهای دو دایره با نسبت تجانس مفروض برابر است. و مرکز تجانس خط‌المرکزین را به‌نسبت مفروض تقسیم می‌کند.

اکنون مسئلهٔ عکس را در نظر می‌گیریم. دو دایرهٔ (A) و (B) مفروض‌اند (شکل ۱۰۵)؛ نقطهٔ M و نسبت k را طوری بیابید که (B) متناظر (A) در تجانس (M,k) باشد.

از ویژگیهایی که یادآوری کردیم نتیجه می‌شودکه k باید با نسبت $a:b$ برابر باشد که a و b به‌ترتیب شعاعهای دو دایرهٔ مفروض (A) و (B) هستند؛ همچنین M باید بر یکی از دو نقطهٔ S و S'، که خط‌المرکزین دو دایره را به‌طور داخلی و خارجی به نسبت $a:b$ تقسیم می‌کنند، منطبق باشد.

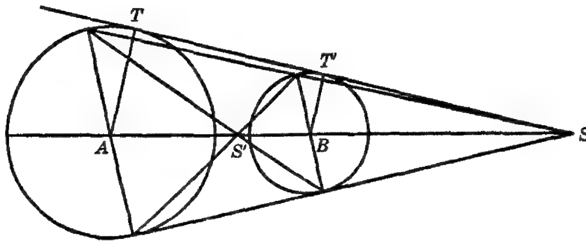
از طرف دیگر، روشن است که در هریک از دو تجانس $(S,a:b)$و $(S',-a:b)$ دایرهٔ متناظر (A) بر (B) منطبق است. پس: دو دایره به دو صورت و فقط به دو صورت متجانس‌اند.

۳۹۴. چندتعریف. نقطهٔ S(§۳۹۳) را مرکز تشابه خارجی یا مستقیم، و نقطهٔ S' را مرکز تشابه داخلی یا غیرمستقیم دو دایره می‌نامند.

مرکز تشابه خارجی با دو انتهای هردو شعاع موازی هم‌جهت در دو دایره، یعنی شعاعهایی از دو دایره که موازی و هر دو در یک طرف خط‌المرکزین دو دایره باشند، همخط است. مرکز تشابه داخلی با دو انتهای هردو شعاع موازی مختلف‌الجهت، یعنی شعاعهایی در دو دایره که موازی و در دو طرف خط‌المرکزین باشند، همخط است.

مراکز دو دایره و دو مرکز تشابه این دو دایره دو جفت نقطهٔ همسازند.

۳۹۵. ملاحظه. (الف) اگر دو دایره برهم مماس باشند، آنگاه نقطهٔ تماسشان یک مرکز تشابه دو دایره است.



شکل ۱۰۵

(ب) دو دایرهٔ برابر تنها یک مرکز تشابه دارند، که نقطهٔ وسط خط‌المرکزین آنهاست.

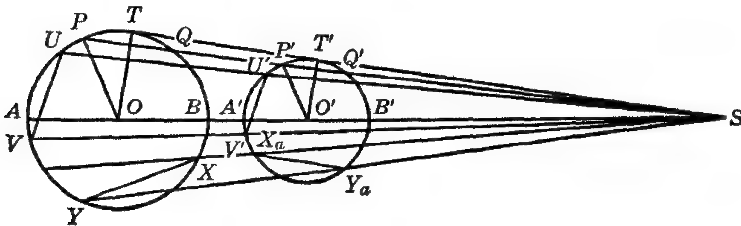
(ج) اگر دو دایره هم مرکز باشند، مرکز مشترکشان تنها مرکز تشابه آنهاست.

۳۹۶. قضیه. (الف) اگر دو دایره مماسهای مشترک خارجی داشته باشند، این مماسها از مرکز تشابه خارجی آن دو دایره می‌گذرند (شکل ۱۰۵).

(ب) اگر دو دایره مماسهای مشترک داخلی داشته باشند، این مماسها از مرکز تشابه داخلی آن دو دایره می‌گذرد.

زیرا در هریک از این دو حالت، مماس مشترک از دو انتهای دو شعاع موازی می‌گذرد.

۳۹۷. چندتعریف. (الف) فرض کنید خطی که از یکی از دو مرکز تشابه دو دایرهٔ (O) و (O')، مثلاً مرکز تشابه خارجی S، می‌گذرد (شکل ۱۰۶) دایرهٔ (O) را در P و Q و دایرهٔ (O') را در P' و Q' قطع کند. چون S مرکز تجانس دو دایره است، برای هر نقطهٔ P از (O) یک نقطهٔ متناظر از (O')، مثلاً، P' وجود دارد به‌طوری که OP و $O'P'$ موازی‌اند. نقاط P و P' را نقاط همتا روی دایره، نسبت به‌مرکز تجانس S می‌نامند. Q و Q' نیز دو نقطهٔ همتا روی دو دایره نسبت به S هستند.



شکل ۱۰۶

فرض کنید U و V دو نقطهٔ دلخواه روی (O) و U' و V' به‌ترتیب، نقاط همتای این دو نقطه نسبت به یک مرکز تشابه باشند، وترهای UV و $U'V'$ را وترهای همتا در دو دایره می‌نامند.

دو وتر همتا موازی‌اند، زیرا دو خط متناظر از دو شکل متجانس‌اند، مگر اینکه هردو روی خطی که از مرکز تشابه می‌گذرد قرار داشته باشند، مثل وترهای PQ و $P'Q'$ (شکل ۱۰۶).

(ب) دو نقطه از دو دایره را که با یک مرکز تشابه دو دایره همخط باشند، ولی شعاعهایی که از این دو نقطه می‌گذرند موازی نباشند، دو نقطهٔ پاد همتا نسبت به مرکز تشابه در نظر گرفته شده، می‌نامند؛ پس در شکل ۱۰۶، دو نقطهٔ P و Q'، و دو نقطهٔ P' و Q نسبت به S پاد همتا هستند.

اگر X و Y دو نقطه از دایرهٔ (O)، و X_a و Y_a نقاط پاد همتای آنها، روی دایرهٔ (O') نسبت به یک مرکز تشابه باشند، دو وتر XY و X_aY_a را وترهای پاد همتا در دو دایره، نسبت به مرکز تشابه در نظر گرفته شده، می‌نامند. اگر دو دایره متقاطع باشند، در هر نقطهٔ مشترک دو دایره دو نقطهٔ پاد همتا از دو دایره برهم منطبق‌اند.

۳۹۸. قضیه. قاطعی که از مرکز تشابه دو دایره می‌گذرد، این دو دایره را در دو جفت نقطهٔ همتا قطع می‌کند هر جفت از این نقاط همتا پاره‌خطی را تعیین می‌کنند؛ حاصل‌ضرب این دو پاره‌خط مقدار ثابتی است.

داریم (شکل ۱۰۶)

$$\frac{SP}{SA} = \frac{SP'}{SA'} = \frac{SP - SP'}{SA - SA'} = \frac{PP'}{AA'}$$

و به‌طور مشابه،

$$SQ : SB = QQ' : BB'$$

پس با ضرب کردن به‌دست می‌آوریم

$$\frac{SP \cdot SQ}{SA \cdot SB} = \frac{PP' \cdot QQ'}{AA' \cdot BB'}$$

چون سمت چپ این تساوی برابر یک است، پس

$$PP' \cdot QQ' = AA' \cdot BB' \qquad (۱)$$

چون طرف راست تساوی رابطهٔ (۱) به قاطع SPP' بستگی ندارد، قضیه ثابت شده است.

۳۹۹. ملاحظه. اگر دایره‌ها مماس مشترکی داشته باشند که از Sبگذرد و در نقاط T و T' بر دایره‌ها مماس باشد، می‌توانیم مماس STT' را به‌عنوان وضعیت حدی قاطع SP، وقتی دو پاره‌خط PP' و QQ' بر پاره‌خط TT' منطبق می‌شوند در نظر بگیریم؛ پس،

$$TT'^{۲} = PP' \cdot QQ'$$

این رابطه را می‌توان، مانند رابطهٔ (۱) به‌طور مستقیم هم به‌دست آورد.

۴۰۰. قضیه. حاصل‌ضرب فواصل یک مرکز تشابه دو دایره از دو نقطهٔ پاد همتا نسبت به آن مرکز تشابه، مقداری ثابت است.

داریم (شکل ۱۰۶)

$$SP \cdot SQ' = SP' \cdot SQ \qquad \text{یا} \qquad SP : SP' = SQ : SQ'$$

از طرف دیگر، داریم

$$SP \cdot SQ = SA \cdot SB\ ,\ SP' \cdot SQ' = SA' \cdot SB'$$

پس،

$$SA \cdot SB \cdot SA' \cdot SB' = SP \cdot SQ \cdot SP' \cdot SQ' = SP^{۲} \cdot SQ'^{۲}$$

چون طرف چپ این تساوی به دو نقطهٔ پادهمتای برگزیده شدهٔ P و Q' بستگی ندارد، قضیه ثابت شده است.

۴۰۱. نتیجه. هر دو جفت نقطهٔ پادهمتا نسبت به یک مرکز تشابه، یا همخط‌اند یا همدایره.

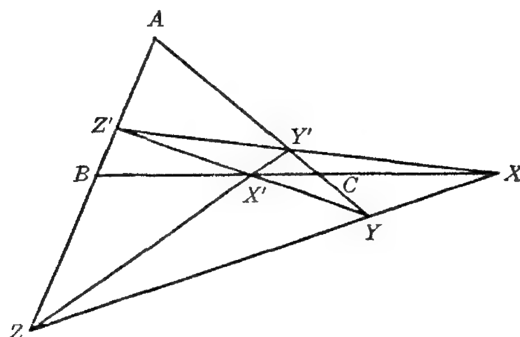
۴۰۲. تعریف. دایره‌ای که دو مرکز تشابه دو دایره دو سر یک قطر آن هستند، دایرهٔ تشابه دو دایره نامیده می‌شود.

۴۰۳. قضیه. نسبت فاصله‌های هر نقطهٔ دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ مفروض از مرکز این دو دایره با نسبت شعاعهای این دو دایره برابر است.

مراکز تشابه، خط‌المرکزین دو دایرهٔ مفروض را به نسبت شعاعهای این دو دایره تقسیم می‌کنند (§۳۹۳)؛ پس قضیه ثابت شده است (مکان هندسی ۱۱، §۱۱).

۴۰۴. نتیجه. دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ متقاطع از نقاط مشترک این دو دایره می‌گذرد.

۴۰۵. قضیه. اگر سه دایره را دوبه‌دو در نظر بگیریم، شش مرکز تشابه به دست می‌آوریم که سه‌به‌سه روی چهار خط راست قرار دارند.



شکل۱۰۷

فرض کنید X، Y، و Z به ترتیب مراکز تشابه خارجی دایره‌های مفروض (B,b) و (C,c)؛ (C,c) و (A,a)؛ (A,a) و (B,b)؛ و X'، Y'، و Z' نیز به ترتیب مراکز تشابه داخلی این دایره‌ها باشند (شکل ۱۰۷). داریم (§۳۹۳)

$$BX : CX = b : c\ ,\ CY : AY = c : a\ ,\ AZ : BZ = a : b$$

پس،

$$BX \cdot CY \cdot AZ = CX \cdot AY \cdot BZ$$

بنابراین، X، Y، و Z همخط‌اند (§۳۱۳).

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که سه نقطهٔ X، Y'، Z'؛ سه نقطهٔ Y، Z'، و X'؛ و سه نقطهٔ Z، X'، Y' نیز همخط‌اند.

۴۰۶. تعریف. چهار خطی که شش مرکز تشابه روی آنها قرار دارند (§۴۰۵) محورهای تشابه، یا محورهای تجانس سه دایرهٔ مفروض نامیده می‌شوند.

۴۰۷. نتیجه. خطی که از دو مرکز تشابه سه دایره بگذرد، از یک مرکز تشابه دیگر هم می‌گذرد.

۴۰۸. تعریف. می‌گوییم یک دایره به دو دایرهٔ مفروض به یک شیوه مماس است، اگر هر دو تماس داخلی یا هر دو تماس خارجی باشد. در این‌صورت، می‌گوییم تماسها همانندند.

می‌گوییم یک دایره به دو دایرهٔ مفروض به شیوه‌های مختلف مماس است اگر یک تماس داخلی و یک تماس خارجی باشد. در این‌صورت، می‌گوییم تماسها ناهمانندند.

۴۰۹. قضیه. اگر یک دایره بر دو دایرهٔ مفروض مماس باشد، نقاط تماس، نقاط پادهمتا در این دو دایره مفروض‌اند.

اگر U و V نقاط تماس دایرهٔ (M) به ترتیب، با دو دایرهٔ (A) و (B) باشند، U مرکز تشابه دایره‌های

(M) و (A)، و V مرکز تشابه دایره‌های (M) و (B)(§۳۹۵ الف) است؛ پس خط UV از یک مرکز تشابه دایره‌های (A) و (B) می‌گذرد (§۴۰۷).

خط UV، بسته به اینکه نقاط تماس U و V همانند یا ناهمانند باشند (§۴۰۸) از مرکز تشابه خارجی، یا داخلی، دایره‌های (A) و (B) می‌گذرد.

تمرین

۱) نشان دهید هر دایره‌ای که از مراکز دو دایرهٔ مفروض بگذرد، با دایرهٔ تشابه این دو دایرهٔ مفروض متعامد است.

۲) نشان دهید مماسهایی که در یک نقطهٔ برخورد دو دایره بر آن دو دایره رسم می‌شوند از هر دو مرکز تشابه دو دایره همفاصله‌اند.

۳) (الف) نشان دهید که مرکز ثقل و مرکز ارتفاعی هر مثلث مراکز تشابه دایرهٔ محیطی و دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث هستند؛ (ب) نشان دهید که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث یک مرکز تشابه دایرهٔ محیطی مثلث و دایره‌ای است که از مراکز سه مماس خارجی مثلث می‌گذرد.

۴) از یک نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید که نسبت دو پاره‌خطی که دو دایرهٔ مفروض روی آن جدا می‌کنند با نسبت شعاعهای دو دایره برابر باشد.

۵) دو دایرهٔ (E) و (F) در نقطهٔ A؛ دو دایرهٔ (F) و (D) در نقطهٔ B؛ و دو دایرهٔ (D) و (E) در نقطهٔ C برهم مماس‌اند. دو خط BA و BC دایرهٔ (E) را مجدداً در P و Q قطع می‌کنند. نشان دهید که PQ از مرکز دایرهٔ (E) می‌گذرد و با DF موازی است.

۶) نشان دهید دوازده مرکز تشابه چهار دایرهٔ سه مماس یک مثلث که دوبه‌دو در نظر گرفته شوند، عبارت‌اند از (الف) شش نقطهٔ برخورد اضلاع مثلث با نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌های مقابل این ضلعها؛ و (ب) رأسهای مثلث مفروض که هر کدام دوبار به حساب می‌آیند.

۷) نشان دهید دایره‌ای که قطر آن نیمساز داخلی یک زاویهٔ مثلث مفروضی است، دایرهٔ تشابه دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجیِ متناظر با آن نیمساز مثلث است. دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ محاطی خارجی مثلث را بیابید.

۸) ضلع BC از مثلث ABC در X بر دایرهٔ محاطی داخلی (I) و در X_a بر دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به BC، یعنی (I_a) مماس است. نشان دهید خط AX_a از روبروی قطری X در دایرهٔ (I)، که آن‌را X' می‌نامیم، می‌گذرد. گزاره مشابهی را در مورد روبروی قطری X_a در (I_a) بیان کنید.

۹) (الف) با استفاده از نمادهایی که در مسئلهٔ قبل به کار برده شد، نشان دهید که اگر خط $A'I$ ارتفاع AD از مثلث ABC را در P قطع کند، آنگاه AP با شعاع دایرهٔ محاطی داخلی ABC برابر است. گزارهٔ مشابهی را برای دایرهٔ محاطی خارجی بیان و اثبات کنید. (ب) اگر عمودی که از A' بر AI رسم می‌شود، AD را در Q قطع کند، نشان دهید که QX بر $A'I$ عمود است.

۱۰) با استفاده از همان نمادهای به کار رفته در تمرین قبل، نشان دهید که X_a مرکز تشابه خارجی دایرهٔ محاطی داخلی و دایره‌ای است که ارتفاع AD قطر آن‌است.

۱۱) با استفاده از همان نمادهای به کار رفته در تمرین قبل، نشان دهید مماس دومی که از A' بر (I) رسم می‌شود، مماسی که در X' بر (I) رسم می‌شود، و خط YZ که نقاط تماس (I) با BA و CA را به هم وصل می‌کند، همرس‌اند. گزارهٔ مشابهی را برای (I_a) بیان و اثبات کنید.

۱۲) با استفاده از نمادهای به کار رفته در تمرین قبل، نشان دهید که اگر خطوطی که از B و C به موازات AX_a رسم می‌شوند نیمسازهای CI و BI را به ترتیب در L و M قطع کنند، خط LM با BC موازی است.

تمرینهای تکمیلی

۱) اگر PQ قطر متغیری از یک دایره به مرکز A باشد، و B و C دو نقطهٔ ثابت همخط با A باشند، نشان دهید که مکان هندسی نقطهٔ $M = (CP, BQ)$ یک دایره است.

۲) خطی رسم کنید که فاصله‌هایش از سه رأس یک مثلث مفروض، با سه پاره‌خط مفروض p، q، و r متناسب باشند.

۳) AD و CF دو مماس مشترک خارجی دایره‌های ABC و DEF هستند؛ و BE یکی از مماسهای مشترک داخلی آنهاست. قطرهایی که از B و E می‌گذرند، AC و DF را به‌ترتیب در G و H قطع می‌کنند. نشان دهید که GH از وسط BE می‌گذرد. نشان دهید که اگر جای «مماسهای خارجی» و «مماسهای داخلی» را عوض کنیم، باز هم گزارهٔ فوق برقرار است.

۴) دایرهٔ (O') از مرکز دایرهٔ (O) می‌گذرد. مماسهای مشترک دو دایره در نقاط A و B بر (O') مماس‌اند. نشان دهید که AB بر (O) مماس است.

۵) نشان دهید پاره‌خطی که انتهای دو شعاع موازی دو دایره را به هم وصل می‌کند، از دو نقطهٔ تلاقی دو دایره با زاویهٔ ثابتی دیده می‌شود.

هـ. قوت یک نقطه نسبت به یک دایره

۴۱۰. قضیه. نقطهٔ مفروضی را در داخل یا در بیرون دایره‌ای مفروض در نظر می‌گیریم. در هر حالت حاصل‌ضرب فاصله‌های این نقطهٔ مفروض از دو نقطهٔ همخط با آن که بر روی دایره واقع باشند، مقدار ثابتی است.

فرض کنید E و F دو نقطه از دایرهٔ مفروض (O) همخط با نقطهٔ مفروض L باشند (شکلهای ۱۰۸ الف و ب)، و A و B دو سر قطری از (O) باشند که از L می‌گذرد. دو مثلث LAF و LBE همزاویه، و در نتیجه، متشابه‌اند؛ پس،

$$LA : LF = LE : LB \qquad \text{یا} \qquad LE \cdot LF = LA \cdot LB$$

طرف راست تساوی دوم به نقاط E و F بستگی ندارد؛ بنابراین، قضیه ثابت شده است.

۴۱۱. ملاحظه. اگر L بیرون دایرهٔ (O)، و T نقطهٔ تماس مماسی باشد که از L بر (O) رسم می‌شود (شکل ۱۰۸ ب) به سادگی می‌توان نشان داد که $LE \cdot LF = LT^2$.

۴۱۲. تعریف. مقدار ثابت بیان شده در §۴۱۰، قوت نقطه نسبت به دایره، یا برای دایره، نامیده می‌شود.

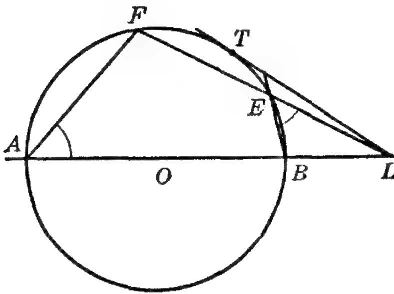
۴۱۳. نتیجه. اگر $OA = OB = r$، و $LO = d$، در شکل ۱۰۸ (الف) داریم

$$LA \cdot LB = (LO + OA)(OB - OL) = r^2 - d^2$$

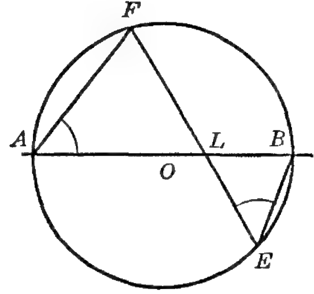
و در شکل ۱۰۸ (ب) داریم

$$LA \cdot LB = (LO + OA)(LO - OB) = d^2 - r^2$$

اگر اندازه‌های منفی را بپذیریم می‌توانیم این دو نتیجه را به این‌صورت بیان کنیم: قوت یک نقطه نسبت به یک دایره، با در نظر گرفتن اندازه و علامت، عبارت است از مربع فاصلهٔ نقطه از مرکز دایره منهای مربع شعاع دایره.



شکل۱۰۸ (ب)



شکل۱۰۸ (الف)

۴۱۴. ملاحظهٔ ۱. (الف) قوت یک نقطه نسبت به یک دایره، بسته به این که نقطه خارج، داخل، یا روی دایره باشد، مثبت، منفی یا صفر است.

(ب) وقتی نقطه خارج دایره است، قوت آن‌نسبت به دایره با مربع مماسی که از آن نقطه بر دایره رسم می‌شود برابر است.

(ج) وقتی نقطه درون دایره است، قوت آن نسبت به دایره برابر است با منفی مربع نصف وتری که بر قطر گذرنده ازآن نقطه عمود است.

(د) قوت مرکز دایره نسبت به دایره با منفی مربع شعاع آن برابر است.

۴۱۵. ملاحظهٔ ۲. اگر نقطهٔ L و مرکز O از دایرهٔ (O) ثابت بمانند، و r شعاع دایرهٔ (O)، کوچک شود تا به صفر برسد، دایرهٔ (O) یک دایرهٔ تک نقطه‌ای می‌شود، ولی مفهوم قوت نسبت به دایره، به صورت رابطهٔ بیان شده در ۴۱۳§، در مورد این دایرهٔ تک نقطه‌ای هم قابل اعمال است.

۴۱۶. قضیه. (الف) اگر دو دایره متعامد باشند، مربع شعاع هر یک از دایره‌ها با قوت مرکز آن دایره نسبت به دایرهٔ دیگر برابر است.

(ب) برعکس، اگر مربع شعاع یک دایره با قوت مرکز آن دایره نسبت به یک دایرهٔ دیگر برابر باشد، دو دایره متعامدند.

اگر دو دایرهٔ مفروض (A,a) و (B,b) متعامد باشند، داریم (۳۶۳§)

$$AB^2 = a^2 + b^2$$

پس،

$$a^2 = AB^2 - b^2 \;,\; b^2 = AB^2 - a^2$$

که اثبات قسمت (الف) قضیه به حساب می‌آید.

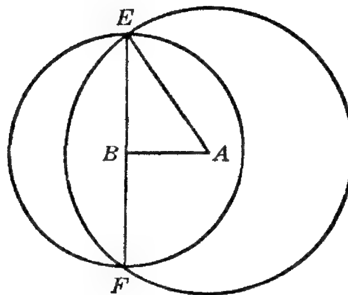
برعکس، اگر داشته باشیم

$$a^2 = AB^2 - b^2 \qquad \text{آن‌گاه} \qquad AB^2 = a^2 + b^2$$

که ثابت می‌کند دو دایره متعامدند (۳۶۳§).

۴۱۷. نتیجه. اگر نقطه‌ای خارج دایره‌ای مفروض باشد، قوت آن نسبت به آن دایره برابر است با مربع شعاع دایره‌ای که نقطهٔ مفروض مرکز آن است، و با دایرهٔ مفروض متعامد است.

۴۱۸. تعریف. اگر وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع (A) و (B) قطر دایرهٔ (B) باشد، می‌گوییم دایرهٔ (B) توسط (A) نصف می‌شود، و دایرهٔ (A) منصّف دایرهٔ (B) است (شکل ۱۰۹).



شکل ۱۰۹

۴۱۹. قضیه. اگر دایره‌ای توسط یک دایرهٔ مفروض نصف شود، مربع شعاع دایرهٔ نصف شده برابر است با منفی قوت مرکز دایرهٔ نصف شده نسبت به دایرهٔ منصف.

اگر دایرهٔ (B) توسط دایرهٔ مفروض (A) نصف شود، و E و F دو سر وتر مشترک آنها باشند (شکل ۱۰۹)، داریم

$$AE^2 = BE^2 + AB^2 \text{ یا } BE^2 = AE^2 - AB^2 = -(AB^2 - AE^2)$$

که اثبات قضیه به حساب می‌آید.

۴۲۰. نتیجه. دایرهٔ (A) و نقطهٔ B مفروض‌اند؛ اگر B خارج (A) باشد، B مرکز دایره‌ای متعامد با (A) است؛ اگر B داخل (A) باشد، B مرکز دایره‌ای است که توسط (A) نصف می‌شود. در حالت اول، مربع شعاع دایرهٔ (B) برابر است با قوت نقطهٔ B نسبت به (A)؛ در حالت دوم، مربع شعاع (B) برابر است با منفی قوت نقطهٔ B نسبت به (A).

تمرین

۱) نشان دهید که (الف) مکان هندسی نقطه‌ای که قوتش نسبت به یک دایره ثابت است، دایره‌ای هم‌مرکز با آن دایره است؛ (ب) مکان هندسی مرکزدایره‌ای با شعاع ثابت و متعامد با دایره‌ای مفروض، دایره‌ای هم مرکز با دایرهٔ مفروض است.

۲) نشان دهید که اگر مجموع قوتهای مرکز یکی از دو دایرهٔ مفروض نسبت به این دو دایره برابر صفر باشد، دو دایره متعامدند.

۳) نشان دهید که (الف) مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع قوتهایش نسبت به دو دایرهٔ مفروض ثابت است، دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ وسط خط‌المرکزین دو دایرهٔ مفروض است، و بر عکس؛ (ب) مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع قوتهایش نسبت به سه دایرهٔ مفروض ثابت است، دایره‌ای است که مرکزش مرکز ثقل مثلثی است که رأسهای آن مراکز سه دایرهٔ مفروض هستند، و برعکس.

۴) مربع فاصلهٔ بین یک نقطهٔ ثابت و یک نقطهٔ متغیر برابر است با مجموع (یا تفاضل) قوتهای این دو نقطه نسبت به یک دایرهٔ ثابت. مکان هندسی نقطهٔ متغیر را بیابید.

۵) دو نقطه نسبت به یک دایره وارون یکدیگرند؛ نشان دهید که (الف) مجموع قوتهای این دو نقطه نسبت به دایره برابر است با مربع فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر؛ (ب) حاصل‌ضرب قوتهای این دو نقطه نسبت به دایره برابر است با منفی حاصل‌ضرب مربع شعاع دایره و مربع فاصلهٔ بین دو نقطه.

۶) دو نقطه نسبت به یک دایره وارون یکدیگرند. نشان دهید که مجموع معکوس قوتهای این دو نقطه نسبت به دایره برابر است بامنفی معکوس مربع شعاع دایره.

۷) نشان دهید که قوت مرکز ارتفاعی یک مثلث نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث چهار برابر قوت همان نقطه نسبت به دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث است.

۸) نشان دهید که مجموع قوتهای رأسهای یک مثلث نسبت به دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث برابر است با یک چهارم مجموع مربع اضلاع مثلث.

۹) $ABCD$ مستطیلی است که در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است؛ PX، PX'، PY، و PY' عمودهایی هستند که از یک نقطهٔ دلخواه P بر اضلاع AB، CD، AD، و BC رسم شده‌اند. ثابت کنید که $PX \cdot PX' + PY \cdot PY'$ با قوت P نسبت به دایرهٔ O برابر است.

تمرینهای تکمیلی

۱) دایره‌ای متغیر با شعاع ثابت، بادایرهٔ ثابتی متعامد است. نشان دهید که دو انتهای قطری از دایرهٔمتغیر که راستای ثابتی دارد، روی دو دایرهٔ ثابت حرکت می‌کنند.

۲) نقاط M و M' روی یک خط ثابت طوری تغییر می‌کنند که حاصل‌ضرب فاصله‌هایشان از یک نقطهٔ ثابت خط، ثابت می‌ماند. نشان دهید که‌مکان هندسی مرکز دایره‌ای که از نقاط M و M' و یک نقطهٔ ثابت صفحه می‌گذرد، یک خط راست است.

۳) دایرهٔ محاطی خارجی (I_a) از مثلث ABC ، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را که مرکز آن نقطهٔ O است در D ، و I_aD دایرهٔ (O) را در E قطع می‌کند. نشان دهید که I_aE با قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر است.

۴) محل دایرهٔ محیطی یک مثلث، محل نقطهٔ برخورد نیمساز داخلی یک زاویهٔ مثلث با ضلع مقابل این زاویه، و حاصل‌ضرب دو ضلع دیگر مثلث مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

۵) نشان دهید که مربع شعاع دایرهٔ قطبی یک‌مثلث بانصف قوت مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث برابر است (راهنمایی. از ۱۷۶§ و ۳۸۹§ استفاده کنید.)

۶) نشان دهید که مجموع قوتهای نقاط متقارن مرکز ارتفاعی یک مثلث نسبت به رأسهای مثلث، نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث برابر است بامجموع مربع اضلاع مثلث.

۷) دو دایرهٔ نابرابر به طور داخلی در A مماس‌اند. مماسی که در نقطهٔ B بر دایرهٔ کوچکتر رسم می‌شود، دایرهٔ بزرگتر را در C و D قطع می‌کند. نشان دهید که AB نیمساز زاویهٔ CAD است.

۸) خطوطی که رأسهای A، B، و C از مثلث ABC را به نقطه‌ای مانند S وصل می‌کنند، اضلاع مقابل را به ترتیب در L، M، و N قطع می‌کنند، و دایرهٔ (LMN) این اضلاع را مجدداً در L'، M' و N' قطع می‌کند. نشان دهید که خطوط AL'، BM' و CN' همرس‌اند.

و. محور اصلی دو دایره

۴۲۱. قضیه. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که قوتهایش نسبت به دو دایرهٔ مفروض همواره برابرند؛ مکان هندسی این نقطه خط راستی عمود بر خط‌المرکزین دو دایرهٔ مفروض است.

دایره‌های (A,a) و (B,b) مفروض‌اند .اگر X نقطه‌ای از مکان هندسی مطلوب باشد، بنابر فرض داریم

$$XA^2 - a^2 = XB^2 - b^2 \qquad \text{یا} \qquad XA^2 - XB^2 = a^2 - b^2$$

و با توجه به مکان هندسی ۱۲ از ۱۱§، قضیه ثابت می‌شود.

۴۲۲. تعریف. خط مذکور (§۴۲۱) را محور اصلی دو دایره می‌نامند.

۴۲۳. نتیجه. قوتهای یک نقطهٔ مشترک از دو دایرهٔ مفروض، نسبت به این دو دایره، برابرند، زیرا هر دو صفرند (§۴۱۴ الف)؛ پس، محور اصلی دو دایرهٔ متقاطع خطی است که از نقاط برخورد دو دایره می‌گذرد.

۴۲۴. ملاحظه. (الف) اگر a یا b، یا هر دو صفر باشند باز هم قضیهٔ §۴۲۱ معتبر است (§۴۱۵)، یعنی می‌توانیم در مورد محور اصلی یک دایره و یک نقطه، و حتی محور اصلی دو نقطه حرف بزنیم، که در حالت اخیر، محور اصلی، عمودمنصف پاره‌خط بین دو نقطه است.

(ب) اگر دو دایره بر هم مماس باشند، محور اصلی آنها همان مماس مشترک آنها در نقطهٔ تماسشان است.

(ج) دو دایرهٔ هم مرکز محور اصلی ندارند.

۴۲۵. قضیه. محورهای اصلی سه دایره با مرکزهای غیر همخط که دو به دو در نظر گرفته شوند، همرس‌اند.

اگر محور اصلی دایره‌های (A) و (B) محور اصلی دایره‌های (A) و (C) را در نقطهٔ R قطع کند، و اگر R_a، R_b، و R_c به ترتیب قوتهای نقطهٔ R نسبت به (A)، (B)، و (C) باشند، داریم

$$R_a = R_b \qquad \text{و} \qquad R_a = R_c \qquad \text{پس} \qquad R_b = R_c$$

یعنی نقطهٔ R روی محور اصلی دایره‌های (B) و (C) هم قرار دارد، و قضیه ثابت شده است.

۴۲۶. مسئله. محور اصلی دو دایره را رسم کنید.

(الف) اگر دو دایره متقاطع باشند، خطی که از نقاط برخوردشان می‌گذرد محور اصلی آنهاست (§۴۲۳).

(ب) اگر دو دایرهٔ مفروض متقاطع نباشند، دایرهٔ (C) را طوری رسم می‌کنیم که هم (A) و هم (B) را قطع کند. فرض کنید وتر مشترک (A) و (C)، وتر مشترک (B) و (C) را در نقطهٔ R قطع کند. محور اصلی (A) و (B) از نقطهٔ R می‌گذرد (§۴۲۵) و بر AB، یعنی خط‌المرکزین این دو دایره، عمود است.

(ج) اگر دایرهٔ (A) به نقطهٔ A تبدیل شود، دایرهٔ (C) را طوری رسم می‌کنیم که از A بگذرد و (B) را قطع کند. فرض کنید مماسی که از نقطهٔ A بر (C) رسم می‌شود، وتر مشترک (B) و (C) را در R قطع کند. خطی که از R بر خط AB عمود می‌شود، محور اصلی مطلوب است.

۴۲۷. قضیه. (الف) مکان هندسی نقطه‌ای که بتوان از آن نقطه مماسهایی با طول یکسان بر دو دایرهٔ مفروض رسم کرد، محور اصلی دو دایره است (§۴۱۴ الف، §۴۲۱).

(ب) اگر دو دایره مماسهای مشترک داشته باشند، آن‌گاه نقاط وسط مماسهای مشترک روی محور اصلی دو دایره قرار دارند.

۴۲۸. قضیه. (الف) مرکز دایره‌ای که بادو دایرهٔ مفروض متعامد باشد، روی محور اصلی دو دایرهٔ مفروض قرار دارد.

(ب) اگر مرکز دایره‌ای روی محور اصلی دو دایره باشد، و اگر دایرهٔ مورد نظر با یکی از این دو دایره متعامد باشد، آن‌گاه با دیگری هم متعامد است.

اگر دایرهٔ (M, m) با دو دایرهٔ (A) و (B) متعامد باشد، قوت M نسبت به هر دو دایره برابر m^2 است (§۴۱۶ الف)؛ پس M روی محور اصلی (A) و (B) قرار دارد.

اگر دایرهٔ (M, m) با دایرهٔ (A) متعامد باشد، قوت M نسبت به (A) برابر m^2 است. اگر M روی محور اصلی دایره‌های (A) و (B) قرار داشته باشد، قوت M نسبت به (B) برابر m^2 است (§۴۱۶ الف)؛

پس دایرهٔ (M,m) با (B) متعامد است (§۴۱۶ ب).

۴۲۹. قضیه. خطوط قطبی نقطه‌ای واقع بر محور اصلی دو دایرهٔ مفروض، نسبت به این دو دایره، یکدیگر را روی محور اصلی قطع می‌کنند.

فرض کنید Q نقطهٔ برخورد دو خط قطبی نقطهٔ P نسبت به دو دایرهٔ (A) و (B) باشد، و فرض کنید که P روی محور اصلی این دو دایره، که خط u است، قرار داشته باشد. نقاط P و Q هم نسبت به (A) و هم نسبت به (B) مزدوج‌اند؛ بنابراین، دایره‌ای که PQ قطر آن‌است با (A) و (B) متعامد است (§۳۸۷). پس نقطهٔ وسط PQ، یعنی نقطهٔ O، روی u قرار دارد (§۴۲۸). پس دو نقطهٔ P و O از سه نقطهٔ همخط O، P، و Q روی خط u قرار دارند؛ پس نقطهٔ سوم، یعنی Q نیز روی خط u قرار دارد و قضیه ثابت شده است.

این اثبات چه دایره‌های مفروض متقاطع باشند و چه نباشند معتبر است. ولی وقتی دو دایره دو نقطهٔ مشترک E و F دارند، گزاره تقریباً روشن است، زیرا هر دو خط قطبی P از مزدوج همساز P نسبت به E و F می‌گذرند.

۴۳۰. نتیجه. اگر از یک نقطهٔ واقع بر محور اصلی دو دایره چهار مماس بر این دایره‌ها رسم شود، دو وتری که هرکدام در یک دایره دو نقطهٔ تماس را به یکدیگر وصل می‌کنند، یکدیگر را روی محور اصلی دو دایره قطع می‌کنند.

تمرین

۱) نشان دهید که اگر مربع شعاعهای دو دایره به یک مقدار زیاد یا کم شوند، محور اصلی دو دایره تغییر نمی‌کند.

۲) نشان دهید که اگر از یک نقطهٔ روی محور اصلی دو دایره، دو قاطع رسم کنیم که هر کدام یکی از دو دایره را قطع کند چهار نقطه برخورد این قاطعها با دو دایره، چهار نقطهٔ همدایره هستند.

۳) نشان دهید مکان هندسی نقطه‌ای که‌تفاضل قوتهایش نسبت به دو دایرهٔ مفروض ثابت است، خط راستی موازی با محور اصلی دو دایره است.

۴) در صفحهٔ یک دایرهٔ مفروض، دایره‌ای دیگر با شعاع مفروض رسم می‌کنیم، به طوری که محور اصلی دو دایره از نقطهٔ ثابت مفروضی بگذرد. نشان دهید که مکان هندسی مرکز دایرهٔ دوم یک دایره است.

۵) نشان دهید که محور ارتفاعی یک مثلث محور اصلی دایرهٔ محیطی و دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث است.

۶) نقطه‌ای روی خط راستی عمود بر خط‌المرکزین دو دایره حرکت می‌کند. نشان دهید که نقطهٔ برخورد خطوط قطبی این نقطه نسبت به دو دایره خط راستی موازی با خط مفروض را می‌پیماید.

۷) (الف) وتر مشترک یک دایرهٔ ثابت و دایرهٔ متغیری که از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد، مماسی را که در این نقطهٔ ثابت بر دایرهٔ متغیر رسم می‌شود در نقطهٔ P قطع می‌کند. نشان دهید که مکان هندسی نقطهٔ P یک خط راست است. (ب) از یک نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید که از مرکز دور از دسترس یک دایرهٔ مفروض بگذرد.

۸) از یک نقطهٔ مفروض مماسهایی بر دایرهٔ مفروضی که مرکز آن دور از دسترس است، رسم کنید.

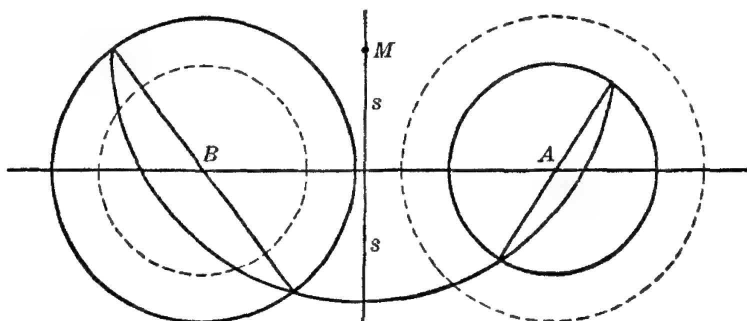
۹) نشان دهید که هر ارتفاع مثلث، محور اصلی دو دایره‌ای است که قطرهایشان میانه‌های رسم شده از دو رأس دیگر مثلث هستند.

۱۰) نشان دهید که محور اصلی یک دایره و یک نقطه، عمود منصف پاره‌خط بین آن نقطه و نقطهٔ وارونش نسبت به دایره است.

۱۱) یک دایره با دو دایرهٔ مفروض مماس بر هم متعامد است. نشان دهید که این دایره در نقطهٔ تماس دو دایرهٔ مفروض بر خط‌المرکزین این دو دایره مماس است.

۱۲) نشان دهید که اگر چهار دایرهٔ سه مماس یک مثلث را دوبه‌دو در نظر بگیریم، محورهای اصلی آنها، نیمسازهای زاویه‌های مثلث میانک مثلث مفروض هستند.

۱۳) دو دایره را که قطرهایشان قطرهای AC و BD از ذوزنقهٔ $ABCD$ هستند در نظر بگیرید. نشان دهید که محور اصلی این دو دایره از نقطهٔ برخورد اضلاع ناموازی BC و AD از ذوزنقه می‌گذرد.



شکل ۱۱۰

۴۳۱. قضیه. مکان هندسی مرکز دایره‌ای که دو دایرهٔ مفروض را نصف می‌کند، خط راستی عمود بر خط‌المرکزین دو دایرهٔ مفروض است.

اگر دایرهٔ (M,m) دایره‌های مفروض (A,a) و (B,b) (شکل ۱۱۰) را نصف کند، داریم (§۴۱۹)

$$MA^2+a^2=m^2=MB^2+b^2$$

پس،

$$MA^2-MB^2=b^2-a^2 \qquad (1)$$

و قضیه ثابت می‌شود (مکان هندسی ۱۲، §۱۱).

۴۳۲. تعریف. خط s را که با معادلهٔ (۱)(§۴۳۱) توصیف می‌شود گاهی محور پاداصلی دو دایرهٔ مفروض می‌نامند.

۴۳۳. ملاحظه. برای نقطهٔ M' واقع بر محور اصلی r برای دایره‌های (A,a) و (B,b)، داریم

$$M'A^2-M'B^2=a^2-b^2 \qquad (2)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند که دو خط s و r نسبت به نقطهٔ وسط خط‌المرکزین AB متقارن‌اند. همچنین، می‌توان دید که s محور اصلی دو دایرهٔ (A,b) و (B,a) است (شکل ۱۱۰).

۴۳۴. قضیه. دو وتر پاد همتا در دو دایره، یکدیگر را روی محور اصلی دو دایره قطع می‌کنند.

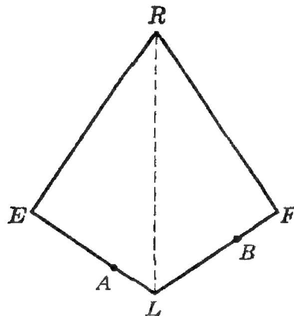
اگر M و Q دو نقطه از دایرهٔ (O)، و N' و P' نقاط پادهمتای آنها از دایرهٔ (O')، نسبت به یک مرکز تشابه دایره‌های (O) و (O') باشند، چهار نقطهٔ M، Q، N'، و P' روی دایره‌ای (§۴۰۱)، مانند دایرهٔ (S)، قرار دارند.

وتر MQ محور اصلی دو دایرهٔ (S) و (O)، و وتر $N'P'$ محور اصلی دو دایرهٔ (S) و (O') است؛ پس

MQ و $N'P'$ روی محور اصلی دو دایرهٔ (O) و (O') یکدیگر را قطع می‌کنند (§۴۲۵).

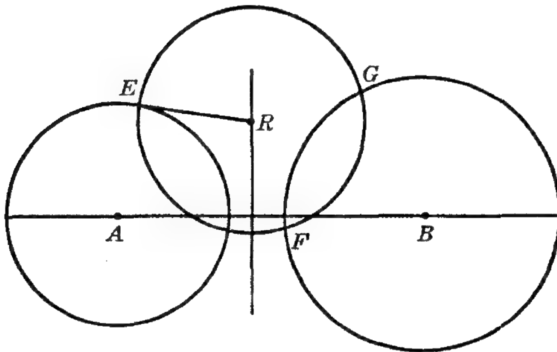
۴۳۵. قضیه. اگر دو مماس رسم شده بر دو دایره یکدیگر را روی محور اصلی این دو دایره قطع کنند، آن‌گاه نقاط تماس نقاط پادهمتا در دایره‌های مفروض‌اند.

فرض کنید مماسهای RE و RF (شکل ۱۱۱) که به ترتیب در نقاط E و F بر دو دایرهٔ (A) و (B) رسم شده‌اند یکدیگر را در R، روی محور اصلی (A) و (B) قطع کنند، و دو خط EA و BF یکدیگر را در نقطهٔ L قطع کنند. مماسهای RE و RF برابرند (§۴۲۷ الف)؛ پس با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ همنهشت REL و RFL، داریم $LE = LF$. پس دایره‌ای که به مرکز L و به شعاع $LE = LF$ رسم می‌شود، در نقاط E و F بر دایره‌های (A) و (B) مماس است؛ در نتیجه، قضیه ثابت شده است (§۴۰۹).



شکل ۱۱۱

۴۳۶. قضیهٔ عکس. اگر دو نقطه از دو دایره پادهمتا باشند، مماسهایی که در این نقاط بر دایره‌ها رسم می‌شوند، یکدیگر را روی محور اصلی دو دایره قطع می‌کنند.



شکل ۱۱۲

فرض کنید مماسی که در E بر دایرهٔ (A) رسم می‌شود (شکل ۱۱۲) محور اصلی دو دایرهٔ (A) و (B)، را در R قطع کند. دایرهٔ (R, RE) با هر دو دایرهٔ (A) و (B) متعامد است (§۳۶۴ ب، §۴۲۸ ب)؛ پس مماسهایی که در F و G، یعنی نقاط برخورد (B) با (R, RE) بر (B) رسم می‌شوند، از نقطه R می‌گذرند (§۳۶۶). پس بنابر قضیه (§۴۳۵)، دو نقطهٔ E و F و همچنین، دو نقطهٔ E و G نقاط پادهمتا روی (A) و (B) هستند، ولی نقطهٔ E روی دایرهٔ (A) تنها دو نقطهٔ پادهمتا روی (B) دارد؛ پس این دو نقطه همان F و G هستند، و همان‌طورکه دیدیم قضیه‌ای که باید اثبات شود برای دو نقطهٔ E و F و دو نقطهٔ E و G معتبر است .

۴۳۷. نتیجه. چهار نقطهٔ برخورد دو دایره با دایره‌ای که با هر دو متعامد است، سه جفت خط را تعیین می‌کنند؛ یک جفت از این خطها یکدیگر را روی محور اصلی دو دایره و دو جفت خط دیگر در مراکز تشابه دو دایره یکدیگر را قطع می‌کنند.

۴۳۸. قضیه. دو دایره و نقطه‌ای روی دایرهٔ تشابه آنها مفروض‌اند. وارونهای این نقطه نسبت به دو دایره، نسبت به محور اصلی دو دایره متقارن‌اند.

شکل۱۱۳

اگر P و Q (شکل ۱۱۳) نقاط وارون نقطهٔ W نسبت به دایره‌های مفروض (A,a) و (B,b) باشند، داریم

$$AP \cdot AW = a^{۲} \ , \ BQ \cdot BW = b^{۲}$$

و اگر W نقطه‌ای روی دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ مفروض باشد، داریم (§۴۰۳)

$$WA : WB = a : b$$

دو تساوی اول را بر هم تقسیم می‌کنیم و با در نظر گرفتن تساوی سوم به دست می‌آوریم

$$AP : BQ = AW : BW$$

یعنی AB و PQ موازی‌اند.

ولی دایرهٔ WPQ با هر دو دایرهٔ مفروض متعامد است (§۳۶۹)؛ پس عمودی که از O، مرکز دایرهٔ WPQ، بر AB رسم می‌شود محور اصلی دو دایرهٔ (A,a) و (B,b) است، و چون PQ با AB موازی است، این عمود، عمودمنصف وتر PQ از دایرهٔ WPQ نیز هست؛ به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۴۳۹. نتیجه. دو خط قطبی هر یک از دو مرکز تشابه دو دایرهٔ مفروض، نسبت به آن دو دایره، نسبت به محور اصلی دو دایره متقارن‌اند.

تمرین

۱) نشان دهید که مکان هندسی مرکز دایره‌ای که از یک نقطهٔ مفروض می‌گذرد و دایرهٔ مفروضی را نصف می‌کند، یک خط راست است.

۲) دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و دایرهٔ مفروضی را نصف کند.

۳) دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطهٔ مفروض بگذرد و دو دایرهٔ مفروض را نصف کند.

۴) نشان دهید مکان هندسی مرکز دایره‌ای که با یک دایرهٔ مفروض متعامد است و دایرهٔ مفروض دیگری را نصف می‌کند، خط راستی عمود بر خط‌المرکزین دو دایرهٔ مفروض است.

۵) دایره‌ای رسم کنید که با دو دایرهٔ مفروض متعامد باشد و دایرهٔ مفروض سومی را نصف کند.

۶) دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ مفروضی بگذرد، دایرهٔ مفروضی را نصف کند، و با دایرهٔ مفروض دیگری متعامد باشد.

۷) دو دایرهٔ (O) و (O') مفروض‌اند؛ خطوطی که نقطهٔ M از دایره (O) را به دو مرکز تشابه (O) و (O') وصل می‌کنند، (O') را در چهار نقطه قطع می‌کنند. نشان دهید که از این چهار نقطه دو نقطه روبروی قطری در (O') هستند و دو نقطهٔ دیگر، مستقل از محل M، با یک نقطهٔ ثابت همخط‌اند.

۸) نشان دهید اگر دایرهٔ (L) با دو دایرهٔ مفروض (A) و (B) متعامد باشد، محورهای اصلی (L) و (A)، و (L) و (B) یکدیگر را در قطب خط AB نسبت به (L) قطع می‌کنند و نقاط برخوردشان با خط AB قطبهای محور اصلی (A) و (B) نسبت به این دو دایره هستند.

تمرینهای تکمیلی

۱) نشان دهید که محور اصلی دو دایره از محورهای اصلی هر یک از این دو دایره با دایره‌ای که خط‌المرکزین دو دایره قطر آن است، هم‌فاصله است.

۲) خطی دو دایرهٔ متعامد را در دو جفت نقطهٔ همساز قطع می‌کند. نشان دهید که این خط از مرکز یکی از دایره‌ها (یا از مرکزهای هر دو دایره) می‌گذرد.

۳) دو دایرهٔ متغیر بر هم مماس‌اند و در دو نقطهٔ ثابت بر خط مفروضی نیز مماس‌اند. نشان دهید که مکان هندسی نقطهٔ وسط مماس مشترک خارجی دوم این دو دایره، یک دایره است.

۴) دو دایرهٔ متغیر که‌نسبت شعاعهایشان مقدار ثابتی است، در دو نقطهٔ ثابت بر خط مفروضی مماس‌اند و هر دو در یک طرف این خط قرار دارند. مکان هندسی نقطهٔ برخورد مماس مشترک خارجی دوم این دو دایره با محور اصلی دو دایره را به دست آورید.

۵) خطی که با قاعدهٔ BC از مثلث ABC پادموازی است، AB و AC را در P و Q قطع می‌کند و خطی موازی BC اضلاع AB و AC را در E و F قطع می‌کند. نشان دهید وقتی که خط EF تغییرمی‌کند محور اصلی دو دایرهٔ BFQ و CEP ثابت می‌ماند.

۶) نقاط A و B روی دایره‌های (P) و (Q) مفروض‌اند. نقطهٔ C را روی محور اصلی این دو دایره طوری بیابید که اگر خطوط CA و CB دایره‌های (P) و (Q) را در E و F نیز قطع کنند، خط EF بر محور اصلی دو دایره عمود باشد.

۷) فرض کنید R و R' نقاط وسط مماسهای OP و OP' باشند که از نقطهٔ O بر دایرهٔ مفروضی رسم شده‌اند. از نقطهٔ T روی RR' مماسهایی‌بر دایره رسم می‌کنیم؛ نشان دهید اگر وتری که نقاط تماس این دو مماس اخیر دو سر آن هستند، RR' را در U قطع کند، زاویهٔ TOU قائمه است.

ز. دایره‌های هم‌محور

۴۴۰. تعریف. گروهی از دایره‌ها را که یک خط ثابت محور اصلی هر دو دایره از این گروه باشد، یک دسته دایرهٔ هم‌محور می‌نامیم.

خط ثابت مذکور را محور اصلی دسته دایرهٔ هم‌محور می‌نامیم.

۴۴۱. تعیین یک دسته دایرهٔ هم‌محور. برای تشکیل دادن یک دسته دایرهٔ هم‌محور می‌توان یک دایرهٔ (A) و محور اصلی r را به دلخواه برگزید. هر دایرهٔ (B)، بسته به این که محور اصلی دو دایرهٔ (A) و (B) بر r منطبق باشد یا نه، یا متعلق به این دسته دایره است یا نیست؛ زیرا اگر (C) دایرهٔ دیگری باشد به‌طوری که محور اصلی دو دایرهٔ (A) و (C) بر r منطبق باشد، آن‌گاه محور اصلی دو دایرهٔ (B) و (C) نیز بر r منطبق است.

برای تعیین یک دسته دایرهٔ هم‌محور می‌توان دو دایرهٔ (A) و (B) را به دلخواه برگزید. محور اصلی این دو دایره نقش محور اصلی دسته دایرهٔ هم‌محور را خواهد داشت.

پس در مجموع می‌توان گفت: یک دسته دایرهٔ هم‌محور با یک دایره و محور اصلی، یا با دو دایره از آن دسته تعیین می‌شود.

۴۴۲. قضیه. (الف) قوت نقطه‌ای روی محوراصلی یک دسته دایرهٔ هم‌محور نسبت به همهٔ دایره‌های این دسته مقدار ثابتی است.

(ب) برعکس، اگر قوت یک نقطه نسبت به‌همهٔ دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور یکسان باشد، آن نقطه روی محور این دسته دایره است.

۴۴۳. قضیه. مراکز دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور همخط‌اند.

فرض کنید A مرکز دایرهٔ مفروضی از دسته دایرهٔ هم‌محور، و M مرکز دایرهٔ دلخواه دیگری از این دسته باشد. خط AM بر r، یعنی محور اصلی دسته دایره عمود است؛ پس مرکز هر دایره‌ای از دسته دایره روی خطی قرار دارد که از A می‌گذرد و بر r عمود است.

۴۴۴. تعریف. خطی که مرکز همهٔ دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور روی آن قرار دارند، خط مرکزی دسته دایره نامیده می‌شود.

۴۴۵. بحث. (الف) اگر r، محور اصلی یک دسته دایرهٔ هم‌محور، یکی از دایره‌ها را در دو نقطهٔ E و F قطع کند، همهٔ دایره‌های دسته باید از این دو نقطه بگذرند، زیرا قوت E (یا F) نسبت به یکی از دایره‌های دسته صفر است (§۴۱۴ الف). پس قوت آن باید نسبت به همهٔ دایره‌های دیگر این دسته نیز صفر باشد (§۴۴۲ ب).

نقاط E و F را نقاط اساسی دسته دایره می‌نامیم، و می‌گوییم که دسته دایرهٔ متقاطع، یا از نوع متقاطع، است.

(ب) اگر خط r یکی از دایره‌های دسته را قطع نکند، آن‌گاه هیچ دایرهٔ دیگری از دسته را قطع نمی‌کند.

(ج) اگر r بر یکی از دایره‌های دسته، مثلاً در T، مماس باشد همهٔ دایره‌های دسته در T بر r مماس‌اند و یک دسته دایرهٔ هم‌محور مماس بر هم داریم.

نکته. در آنچه در پی می‌آید، گزاره‌های مربوط به دسته دایره‌های هم‌محور تنها برای انواع (الف) و (ب) بیان می‌شوند.

۴۴۶. مسئله. دایره‌ای متعلق به یک دسته دایرهٔ هم‌محور را رسم کنید که نقطهٔ مفروضی مرکز آن باشد.

فرض بر این است که نقطهٔ مفروض M روی خط مرکزی دسته دایره قرار دارد. در غیر این صورت، مسئله قابل حل نیست.

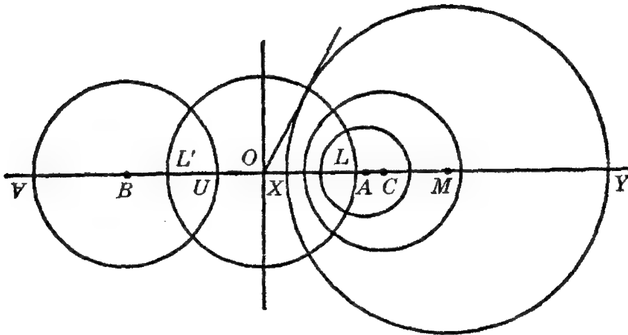
(الف) در حالت دسته دایرهٔ متقاطع،شعاع دایرهٔ مطلوب (M) برابر طول پاره‌خطی است که M را به یکی از نقاط اساسی E و F وصل می‌کند. اگر M بر نقطهٔ برخورد محور اصلی r و خط مرکزی c منطبق باشد، شعاع دایرهٔ مطلوب کمترین مقدار ممکن را دارد، و EF قطر دایرهٔ مطلوب است.

به ازای هر M مفروض روی خط c، مسئله یک و تنها یک جواب دارد.

(ب) در حالت دسته دایرهٔ غیر متقاطع (شکل ۱۱۴)، محور r، و در نتیجه نقطهٔ O که نقطهٔ برخورد r

با خط مرکزی c است، در خارج دایره‌های دسته قرار دارد؛ پس می‌توان از O بر هر یک از دایره‌های دسته، مانند (A)، مماسی رسم کرد. چون O روی r است، طول این مماس با طول مماسی که از O بر هر دایرهٔ دسته، از جمله دایرهٔ مطلوب (M)، رسم می‌شود برابر است. پس اگر m شعاع (M) و t طول مماس رسم شده از O بر هر دایرهٔ دسته باشد، داریم

$$m^2 = OM^2 - t^2 \qquad (1)$$



شکل ۱۱۴

پس اگر فاصلهٔ مرکز مفروض، M، از نقطهٔ O بزرگتر از t باشد، مسئله یک، و تنها یک جواب خواهد داشت.

۴۴۷. تعریف. نقاط L و L' (شکل ۱۱۴) را که نقاط برخورد خط c با دایرهٔ (O,t) هستند نقاط حدی دسته دایرهٔ هم‌محور غیر متقاطع می‌نامند.

مرکز هیچ یک از دایره‌های دسته داخل پاره‌خط LL' نیست، و هر نقطهٔ خط c که خارج پاره‌خط LL' باشد مرکز دایره‌ای از این دسته است.

از رابطهٔ (۱) (§۴۴۶) نتیجه می‌شود که هر چه M به L (یا L') نزدیکتر شود، شعاع دایرهٔ (M) به صفر نزدیکتر می‌شود. به این دلیل، L و L' را گاهی دایره‌های تک نقطه‌ای دسته دایره می‌نامند.

۴۴۸. قضیه. (الف) نقاط حدی یک دسته دایره هم‌محور، نسبت به هر یک از دایره‌های دسته وارون یکدیگرند.

(ب) برعکس، اگر دو نقطه نسبت به همهٔ دایره‌های یک مجموعه از دایره‌ها وارون یکدیگر باشند، آن دایره‌ها یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

اگر X و Y (شکل ۱۱۴) نقاط برخورد خط مرکزی دسته دایره‌ها با هر دایرهٔ دسته باشد، داریم (§۴۴۶ب)

$$OL^2 = t^2 = OX \cdot OY$$

پس $(LL'XY) = -1$ (§۳۴۷)، و قضیه ثابت شده است.

اگر دو نقطهٔ L و L' نسبت به دایره‌های متعلق به گروهی از دایره‌ها وارون یکدیگر باشند، مرکز همهٔ دایره‌های این گروه روی خط LL' قرار خواهند داشت، و اگر X و Y نقاط برخورد LL' با یک دایرهٔ دلخواه گروه دایره‌ها باشند، بنابر فرض، برای نقطهٔ وسط LL'، یعنی O، داریم

$$OX \cdot OY = OL^2$$

پس قوت نقطهٔ O نسبت به همهٔ دایره‌های این گروه یکسان است. پس دایره‌ها یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند، و محور اصلی آنها در نقطهٔ O بر خط LL' عمود است.

۴۴۹. نتیجه. (الف) هر دایره‌ای که از نقاط حدی یک دسته دایرهٔ هم‌محور غیر متقاطع بگذرد، بر همهٔ دایره‌های دسته عمود است.

(ب) خطوط قطبی یک نقطهٔ حدی نسبت به دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور، خطی است که در نقطهٔ حدی دیگر بر خط مرکزی این دسته دایره عمود است.

۴۵۰. قضیه. یک دسته دایرهٔ هم‌محور نمی‌تواند بیش از دو نقطهٔ حدی داشته باشد.

فرض کنید (A) و (B) دو دایرهٔ تعیین کنندهٔ یک دسته دایرهٔ هم‌محور باشند، و فرض کنید که‌خط مرکزی AB این دو دایره را به ترتیب در X، Y و U، V قطع کند (شکل ۱۱۴). اگر L و L' دو نقطهٔ حدی دسته دایره باشند، باید داشته باشیم

$$(XYLL') = -۱ \ , \qquad (UVLL') = -۱$$

پس دو نقطهٔ L و L' تنها نقاط حدی دسته دایره هستند (۳۵۰§).

۴۵۱. مسئله. از یک نقطهٔ مفروض دایره‌ای رسم کنید که به دسته دایرهٔ هم‌محور مفروضی متعلق باشد.

از نقطهٔ دلخواه M روی محور اصلی دسته دایره قاطعی رسم کنید تا یکی از دایره‌های دسته، مثلاً (A)، را در نقاط E و F قطع کند، و روی خط MP، که از M به نقطهٔ مفروض P رسم می‌شود، نقطهٔ Q را در همان طرف M که P قرار دارد طوری انتخاب کنید که $MP \cdot MQ = ME \cdot MF$. اگر عمودمنصف PQ خط مرکزی دسته را در U قطع کند، دایرهٔ (U, UP) شرایط مطلوب مسئله را دارد. در واقع، نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ (A) و (U, UP) قوت یکسانی دارد، پس محور اصلی این دو دایره بر محور اصلی دسته دایره منطبق است، و (U, UP) متعلق به این دسته دایره است.

مسئله یک و تنها یک جواب دارد.

روش حل را می‌توان به هر دو نوع دسته دایره اعمال کرد. ولی در مورد دسته دایرهٔ متقاطع، نقطهٔ‌مفروض و نقاط اساسی دسته جواب را مستقیماً به دست می‌دهند.

۴۵۲. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که بر خط مفروضی مماس، و به یک دسته دایرهٔ هم‌محور مفروض متعلق باشد.

از نقطهٔ برخورد خط مفروض s و محور اصلی r، یعنی نقطهٔ M، مماس MT را بر دایرهٔ دلخواهی از دسته، مثلاً (A)، رسم می‌کنیم و روی s پاره‌خطهای $MP = MP' = MT$ را جدا می‌کنیم. اگر عمودهای PU و $P'U'$ که در نقاط P و P' بر s عمودند خط مرکزی c را در U و U' قطع کند، دو دایرهٔ (U, UP) و $(U', U'P')$ دو جواب مسئله خواهند بود.

حالتی را که s با r موازی است، و همچنین حالتی را که s خط r را بین دو نقطهٔ اساسی دسته دایرهٔ متقاطع قطع می‌کند در نظر بگیرید.

تمرین

۱) نشان دهید که (الف) اگر یک نقطه وجود داشته باشد که قوتهایش نسبت به‌گروهی از دایره‌ها که مرکزهای آنها همخط‌اند مقدار ثابتی باشد، آن دایره‌ها یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند؛ (ب) اگر دو نقطه وجود داشته باشند که قوت هر کدام نسبت به گروهی از دایره‌ها مقدار ثابتی باشد،آن دایره‌ها یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

۲) نشان دهید اگر دایره‌هایی با یک دایرهٔ مفروض متعامد، و مرکزهایشان روی یک قطر دایرهٔ مفروض واقع باشند، آن دایره‌ها یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

۳) اگر دو نقطهٔ متغیر P و P' نسبت به دایرهٔ مفروضی مزدوج، و روی خط ثابتی قرار داشته باشند، نشان دهید دایره‌هایی که PP' قطر آنهاست یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

۴) نشان دهید دایره‌هایی که مراکزشان روی یک خط ثابت واقع است و دایرهٔ مفروضی را نصف می‌کنند، یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

۵) خطی بر دایره‌های (A) و (B) در نقاط T و T' مماس است، و دایرهٔ (C) که با (A) و (B) هم‌محور است، TT' را در E و F قطع می‌کند. نشان دهید که $(EFTT') = -1$.

۶) دایره‌ای به شعاع مفروض رسم کنید که متعلق به یک دسته دایرهٔ هم‌محور مفروض باشد.

۷) نشان دهید (الف) سه دایره‌ای که هرکدام از نقطهٔ مفروض P و دو سر یکی از ارتفاعهای مثلث مفروضی می‌گذرند، نقطهٔ مشترک دیگری نیز، مانند P'، دارند؛ (ب) اگر P مرکز ثقل مثلث باشد، P' روی محور ارتفاعی مثلث قرار دارد؛ (ج) اگر P روی دایرهٔ محیطی باشد، P' روی دایرهٔ نه نقطه است.

۸) اگر وتری از یک دایرهٔ متعلق به دسته دایرهٔ هم‌محوری از یک نقطهٔ حدی دسته بگذرد، نشان دهید که تصویر این وتر روی خط مرکزی دسته قطر یک دایرهٔ دسته است.

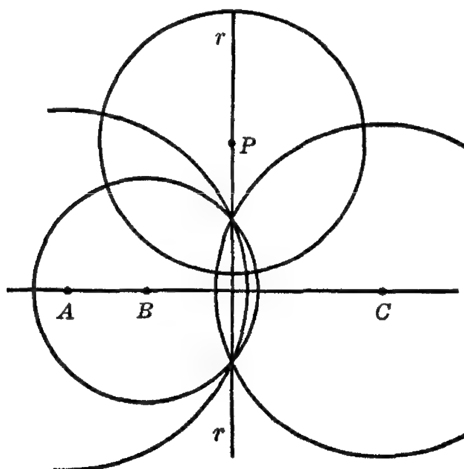
۴۵۳. قضیه. اگر مرکز دایره‌ای روی محور اصلی یک دسته دایرهٔ هم‌محور باشد، و این دایره با یکی از دایره‌های دسته متعامد باشد، آن‌گاه با همهٔ دایره‌های دسته متعامد است.

فرض کنید (A) دایره‌ای از دسته دایرهٔ هم‌محور (U)، و (P, p) دایره‌ای متعامد با (A) باشد که مرکزش، یعنی نقطهٔ P ، روی محور اصلی (U)، خط r است. قوت P نسبت به هر (A) برابر p^2 است (§۴۱۴ الف)، و چون P روی r است، قوت P نسبت به هر دایره‌ای از (U) برابر p^2 است (§۴۴۰ الف)؛ پس (P, p) با هر دایره‌ای از U متعامد است (§۴۱۴ ب).

۴۵۴. نتیجه. اگر دایره‌ای با دو دایره از یک دسته دایرهٔ هم‌محور متعامد باشد، آن‌گاه با همهٔ دایره‌های آن دسته متعامد است.

۴۵۵. قضیه. دایره‌های متعامد با دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور، یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

(الف) دسته دایرهٔ مفروض (U) از نوع متقاطع است. محور اصلی (U)، یعنی خط r، از مرکز هر دایرهٔ (P) (شکل ۱۱۵) متعامد با دایره‌های (A)، (B)، (C)، ⋯ متعلق به دستهٔ (U) می‌گذرد (§۴۲۸)؛



شکل ۱۱۵

پس نقاط اساسی (U) نسبت به (P) وارون یکدیگرند (§۳۶۸)؛ پس قضیه ثابت شده است (§۴۴۸ب).

(ب) دسته دایرهٔ مفروض (U) از نوع نامتقاطع است. اگر (P) دایره‌ای متعامد باهمهٔ دایره‌های (U) باشد،آن‌گاه مرکزش، P، بر روی محور اصلی r از دستهٔ (U) قرار دارد (§۴۲۸). از طرف دیگر، r عمودمنصف پاره‌خط LL' است، که L و L' نقاط حدی (U) هستند (§۴۴۷). پس می‌توان دایرهٔ (P') را طوری رسم کرد که مرکزش P باشد و از نقاط L و L' بگذرد؛ این دایره با همهٔ دایره‌های دستهٔ U متعامد است (§۴۴۹).

پس هر دایرهٔ (A) از دستهٔ (U) هم با (P) و هم با (P') متعامد است. ولی نقطهٔ P تنها می‌تواند مرکز یک دایرهٔ متعامد با (A) باشد؛ پس (P) بر (P') منطبق است و از نقاط L و L' می‌گذرد، و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۴۵۶. تعریف. دسته دایرهٔ (W)، متشکل از دایره‌های متعامد با دایره‌های دسته دایرهٔ (U) را مزدوج (U) می‌نامند. روشن است که (U) نیز مزدوج (W) است.

در دو دسته دایرهٔ هم‌محور مزدوج، هر دایرهٔ یک دسته باهمهٔ دایره‌های دستهٔ دیگر متعامد است.

۴۵۷. ملاحظه. از دو دسته دایرهٔ هم‌محور مزدوج، یکی از نوع متقاطع و دیگری از نوع نامتقاطع است، و نقاط اساسی یکی نقاط حدی دیگری است. به‌علاوه، محور اصلی و خط مرکزی یک دسته به ترتیب، خط مرکزی و محور اصلی دستهٔ دیگر است.

دو دسته دایرهٔ هم‌محور مزدوج با دو نقطهٔ مفروض تعیین می‌شوند.

۴۵۸. قضیه. سه یا بیش از سه دایره که با یک دایره متعامد باشند و مراکزشان روی خط ثابتی قرار داشته باشند یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

در واقع، اگر (W) دسته دایره‌ای باشد که توسط دایرهٔ مفروض (A) و خط مفروض به عنوان محور اصلی تعیین می‌شود، این دایره‌ها دسته دایرهٔ مزدوج (U) را تعیین می‌کنند.

۴۵۹. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطهٔ مفروض بگذرد و با دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور متعامد باشد.

دایرهٔ مطلوب به دسته دایرهٔ (W) که مزدوج دسته دایرهٔ هم‌محور مفروض (U) است تعلق دارد (§۴۵۶)؛ پس مسئله به مسئله‌ای که قبلاً (§۴۵۱) حل کرده‌ایم تبدیل می‌شود.

۴۶۰. قضیه. خطهای قطبی یک نقطه نسبت به دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور همرس‌اند.

فرض کنید خطوط قطبی نقطهٔ مفروض P نسبت به دو دایرهٔ دسته دایرهٔ مفروض (U)، مثلاً (A) و (B)، یکدیگر را در Q قطع کنند. در این صورت، دایرهٔ (PQ) که PQ قطر آن است با (A) و (B) متعامد است (§۳۸۷)؛ پس (PQ) با هر دایرهٔ دیگری از (U)، مثلاً (C) متعامد است (§۴۵۴)، و بنابر این، P و Q نسبت به (C) مزدوج‌اند؛ پس خط قطبی P نسبت به (C) نیز از Q می‌گذرد و قضیه ثابت می‌شود.

۴۶۱. ملاحظه. دایرهٔ (PQ) به دسته دایرهٔ مزدوج دسته دایرهٔ (U)، یعنی دسته دایرهٔ (W) متعلق است؛ پس Q روبروی قطری P، در دایره‌ای است که از P می‌گذرد و به دسته دایرهٔ (W) متعلق است. این راهی برای تعیین نقطهٔ Q است.

همچنین می‌توان مشاهده کرد که چون دایرهٔ (P) از نقطهٔ P می‌گذرد و به دسته دایرهٔ مفروض (U) تعلق دارد، با (PQ) متعامد است، خط PQ در P بر (P) مماس است، و Q متقارن P نسبت به نقطهٔ برخورد این مماس با محور اصلی (U) است. این راه دیگری برای تعیین نقطهٔ Q است.

۴۶۲. قضیهٔ عکس. اگر خطوط قطبی نقطهٔ مفروضی نسبت به سه، یا بیش از سه دایره با مرکزهای همخط، همرس باشند، آن دایره‌ها هم‌محورند.

اگر Q نقطهٔ مشترک خطوط قطبی نقطهٔ P نسبت به دایره‌های (A)، (B)، (C)، $\cdots$ باشد، این دایره‌ها با دایره‌ای که PQ قطر آن است متعامدند (§۳۸۷)؛ پس قضیه ثابت می‌شود (§۴۵۸).

۴۶۳. قضیه. اگر دو نقطه نسبت به یک دایره مزدوج باشند، مربع فاصلهٔ بین آنها با مجموع قوتهایشان نسبت به آن دایره برابر است.

فرض کنید A و B دو نقطهٔ مزدوج نسبت به دایرهٔ مفروض (M) باشند.

(الف) خط AB دایرهٔ (M) را در دو نقطهٔ C و D قطع می‌کند. فرض کنید O نقطهٔ وسط AB باشد. با در نظر گرفتن اندازه و علامت، داریم

$$\begin{aligned}AC \cdot AD &= (AO+OC)(AO+OD)\\ &= AO^۲ + AO(OC+OD) + OC\cdot OD\\ BC\cdot BD &= (BO+OC)(BO+OD)\\ &= BO^۲ + BO(OC+OD) + OC\cdot OD\end{aligned}$$

با جمع کردن این رابطه‌ها و مشاهدهٔ این که

$$AO^۲ = BO^۲ \qquad , \qquad AO + BO = ۰$$

به دست می‌آوریم

$$AC\cdot AD + BC\cdot BD = ۲AO^۲ + ۲OC\cdot OD \tag{۱}$$

ولی A و B نسبت به (M) مزدوج‌اند، و توسط C و D به‌صورت همساز تقسیم می‌شوند؛ پس (۱) به صورت زیر درمی‌آید (§۳۴۶):

$$AC\cdot AD + BC\cdot BD = ۲AO^۲ + ۲AO^۲ = ۴AO^۲ = AB^۲ \tag{۲}$$

و قضیه ثابت می‌شود.

(ب) خط AB دایرهٔ (M) را قطع نمی‌کند. هر دو نقطهٔ A و B خارج (M) قرار دارند و آنها را می‌توان مرکزهای دو دایرهٔ (A) و (B) متعامد با (M) در نظر گرفت. چون نقاط A و B نسبت به (M) مزدوج‌اند، دایرهٔ (AB) که AB قطر آن است، با (M) متعامد است (§۳۸۷)؛ پس سه دایرهٔ (A)، (B) و (AB) هم‌محورند (§۴۵۸) و متقاطع، زیرا دسته دایرهٔ مزدوج که توسط (M) و خط AB به عنوان محور اصلی تعیین می‌شود، غیر متقاطع است.

پس دایرهٔ (AB) از نقاط برخورد دایره‌های (A) و (B) می‌گذرد؛ پس $AB^۲$ با مجموع مربع شعاعهای (A) و (B)، یعنی قوتهای A و B نسبت به (M) برابر است.

۴۶۴. قضیه‌عکس. اگر مربع فاصلهٔ بین دو نقطه با مجموع قوتهای این دو نقطه نسبت به دایره‌ای مفروض برابر باشد، آن‌گاه آن دو نقطه نسبت به دایرهٔ مفروض مزدوج‌اند.

(الف) خط واصل بین نقاط مفروض A و B دایرهٔ مفروض (M) را در دو نقطهٔ C و D قطع می‌کند. بنابر فرض، رابطهٔ (۲) برای نقاط A و B برقرار است (§۴۶۳) و رابطهٔ (۱) برای هر چهار نقطهٔ همخطی برقرار

است؛ پس با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) داریم

$$2AO^2 + 2OC \cdot OD = AB^2 = 4AO^2 \qquad \text{یا} \qquad OC \cdot OD = AO^2$$

یعنی C و D نقاط A و B را به صورت همساز تقسیم می‌کنند، و قضیه ثابت می‌شود.

(ب) خط AB دایرهٔ (M) را قطع نمی‌کند. مربع AB، بنابر فرض، بامجموع مربع شعاعهای (A) و (B)، که با (M) متعامدند و Aو B مراکزشان هستند، برابر است. پس (A) و (B) با هم متعامدند؛ بنابر این، دایرهٔ (AB) که AB قطر آن است، از نقاط برخورد این دو دایره می‌گذرد، یعنی با آنها هم‌محور است. پس (AB) با (M) متعامد است (§۴۵۴)؛ و قضیه ثابت می‌شود (§۳۸۶).

۴۶۵. ملاحظه. ضمناً ثابت کرده‌ایم که دو دایرهٔ متعامد با یک دایرهٔ سوم، که مرکزهایشان نسبت به آن دایرهٔ سوم مزدوج باشند، با هم متعامدند.

۴۶۶. نتیجه. اگر سه دایره دوبه‌دو باهم متعامد باشند، مراکز هر دو تایی از آنها نسبت به سومی مزدوج‌اند.

تمرین

۱) دایره‌ای رسم کنید که متعلق به دسته دایرهٔ هم‌محور مفروضی باشد و دایرهٔ مفروضی را که متعلق به این دسته دایره نیست نصف کند.

۲) مکان هندسی وارون یک نقطه نسبت به دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور را بیابید.

۳) نشان دهید که مماس مشترک دو دایرهٔ یک دسته دایرهٔ هم‌محور غیر متقاطع، از یک نقطهٔ حدی دسته با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود.

۴) P نقطه‌ای روی محور اصلی یک دسته دایرهٔ هم‌محور است؛ و PH مماسی است که از P بر یکی از دایره‌های دسته رسم شده است؛ ثابت کنید که $PH = PL$، که L یک نقطهٔ حدی دسته دایرهٔ مفروض است.

۵) نشان دهید مماسی که از یک نقطهٔ حدی بر دایرهٔ دلخواهی از یک دسته دایرهٔ هم‌محور رسم می‌شود، توسط محور اصلی دسته نصف می‌شود.

۶) نشان دهید مماسی که از یک نقطهٔ حدی بر دایره‌ای از یک دسته دایرهٔ هم محور رسم می‌شود، توسط هر دایره‌ای از دسته به طور همساز تقسیم می‌شود.

۷) A، B و C، D نقاط برخورد دو دایرهٔ نامتقاطع با خط‌المرکزین آنها و L یکی از نقاط حدی آنهاست و $AL : LB = CL : LD$. نشان دهید که دو دایره برابرند.

۸) برای هر رأس یک مثلث دایره‌ای رسم کرده‌ایم که از آن رأس بگذرد، با دایرهٔ محیطی مثلث متعامد باشد، و مرکزش روی ضلع مقابل آن رأس باشد. نشان دهید که این سه دایره هم‌محورند.

۹) مماسهایی که در رأسهای A و B، و C از یک مثلث حاده بر دایرهٔ محیطی آن مثلث رسم شده‌اند، به ترتیب اضلاع BC، CA، و AB را در U، V و W قطع کرده‌اند. ثابت کنید دایره‌هایی که AU، BV، و CW قطرشان هستند هم‌محورند، و محور اصلی آنها خط اویلر مثلث است.

۱۰) خط قطبی یک نقطهٔ ثابت، نسبت به یک دایرهٔ متغیر ثابت است. نشان دهید که خط قطبی هر نقطهٔ دیگری نسبت به این دایره، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۱۱) یک دسته دایرهٔ هم‌محور مفروض است. نشان دهید خطی که از یک نقطهٔ ثابت واقع بر محور اصلی و قطب این محور نسبت به دایرهٔ متغیری از دسته دایره می‌گذرد، آن دایره را در دو نقطه قطع می‌کند، و آن دو نقطه به دایره ثابتی تعلق دارند.

۴۶۷. قضیه. محورهای اصلی دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور با دایره‌ای که متعلق به‌این دسته دایره نیست، همرس‌اند و نقطهٔ همرسی آنها روی محور اصلی دسته دایره قرار دارد.

فرض کنید (A) و (B) دو دایرهٔ دلخواه از دسته دایرهٔ (U) باشند، و (S) دایره‌ای باشد که متعلق به (U) نیست. سه محور اصلی سه جفت دایرهٔ

$$(S),(A)\ ;\quad (A),(B)\ ;\quad (S),(B) \qquad (۱)$$

یک نقطهٔ مشترک دارند (§۴۲۵) که آن‌را I می‌نامیم. حال اگر (C) دایرهٔ دیگری از (U) باشد، سه محور اصلی سه‌جفت دایرهٔ

$$(S),(A)\ ;\quad (A),(C)\ ;\quad (S),(C) \qquad (۲)$$

نیز نقطهٔ مشترکی، مانند I'، دارند. ولی دو محور اول (۲) همان دو محور اول (۱) هستند؛ پس I' بر I منطبق است و قضیه اثبات می‌شود.

۴۶۸. ملاحظه. (الف) اگر I خارج (S) باشد، آن‌گاه I مرکز دایره‌ای متعامد با (S) و متعلق به دسته دایرهٔ هم‌محور (W)، یعنی مزدوج دسته دایرهٔ (U)، است.

(ب) دایرهٔ (S) نسبت به دسته دایرهٔ هم‌محور (W) نیز نقطهٔ مشابهی، مانند J، دارد که روی محور اصلی (W) واقع است، و محور اصلی (W) همان خط مرکزی (U) است (§۴۵۷). نقاط I و J نسبت به (S) مزدوج‌اند (§۴۶۵).

۴۶۹. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که متعلق به یک دسته دایرهٔ هم‌محور مفروض باشد و با دایره‌ای مفروض که متعلق به این دسته دایره نیست متعامد باشد.

فرض کنید (S) دایرهٔ مفروض، (U) دستهٔ دایرهٔ مفروض، c خط مرکزی (U) و (W) دسته دایرهٔ مزدوج (U) باشد. محور اصلی (S) و دایرهٔ دلخواهی از (W)، مثلاً (K)، محور اصلی (W)، یعنی c، را در نقطهٔ J قطع می‌کند. دایره‌ای متعلق به (U) و به مرکز J جواب مسئله است (§۴۶۸ ب).

اگر J خارج (S) باشد مسئله یک جواب دارد.

اگر (S) متعلق به دسته دایرهٔ (W) باشد، هر دایره‌ای از (U) جواب مسئله است.

۴۷۰. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که متعلق به دسته دایرهٔ هم محور مفروضی باشد و بر دایره مفروضی که متعلق به این دسته دایره نیست، مماس باشد.

فرض کنید که محور اصلی دایرهٔ مفروض (S) و دایرهٔ دلخواهی از دسته دایرهٔ هم محور مفروض (U)، محور اصلی (U) را در I قطع کند، و T و T' نقاط تماس (S) با مماسهایی باشند که از I بر آن رسم می‌شوند. اگر خطوط ST و ST' خط مرکزی (U) را در دو نقطهٔ C و C' قطع کنند، دایره‌های (C,CT) و $(C',C'T')$ دو جواب مسئله‌اند.

اگر I داخل دایرهٔ (S) باشد مسئله جواب ندارد.

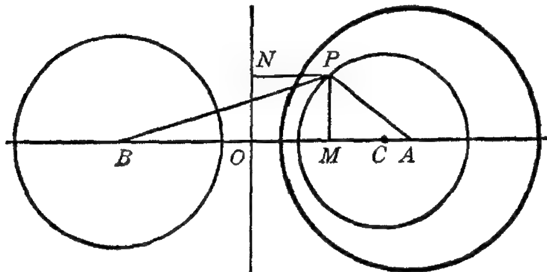
به‌عنوان تمرین، حالتی را که مرکز (S) روی خط مرکزی (U) قرار دارد، و حالتی را که (S) متعلق به (U) است، جداگانه بررسی کنید.

۴۷۱. قضیهٔ کیسی. قوت یک نقطه نسبت به یک دایره، منهای قوت آن نقطه نسبت به دایره‌ای دیگر، با در نظرگرفتن اندازه و علامت، برابر است با دو برابر فاصلهٔ آن نقطه از محور اصلی دو دایره (ابتدای پاره‌خط روی محور اصلی)، ضربدر خط‌المرکزین دو دایره (ابتدای پاره‌خط در مرکز دایره‌ای که اول در نظر گرفته شده است).

فرض کنید (A,a) و (B,b) (شکل ۱۱۶) دایره‌های مفروض، O محل برخورد AB و محور اصلی

آنها، و M و N پای عمودهای PM و PN باشند که از نقطهٔ مفروض P بر AB و محور اصلی r رسم می‌شوند. اگر $d^۲$ تفاضل مورد نظر باشد، داریم

$$d^۲ = (PA^۲ - a^۲) - (PB^۲ - b^۲) = (PA^۲ - PB^۲) - (a^۲ - b^۲)$$



شکل ۱۱۶

باتوجه به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ PMA و PMB، داریم

$$PA^۲ = PM^۲ + AM^۲, PB^۲ = PM^۲ + BM^۲$$

پس،

$$PA^۲ - PB^۲ = AM^۲ - BM^۲$$

چون قوت O نسبت به دو دایره برابر است، داریم

$$OA^۲ - OB^۲ = a^۲ - b^۲ \qquad \text{یا} \qquad OA^۲ - a^۲ = OB^۲ - b^۲$$

پس داریم

$$d^۲ = (AM^۲ - BM^۲) - (OA^۲ - OB^۲)$$

از این رابطه، با برداشتن گامهای زیر و در نظرگرفتن اندازه و علامت، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d^۲ &= (AM + MB)(AM - MB) - (AO + OB)(AO - OB) \\ &= AB(AM - MB - AO + OB) \\ &= AB[(AO + OM) - (MO + OB) - AO + OB] \\ &= ۲AB \cdot OM = ۲AB \cdot NP \end{aligned}$$

۴۷۲. نتیجه. قوت یک نقطهٔ واقع بر یک دایره نسبت به دایره‌ای دیگر، با در نظرگرفتن اندازه و علامت، برابر است با دو برابر حاصل‌ضرب فاصلهٔ آن نقطه از محور اصلی دو دایره (ابتدای پاره‌خط روی محور اصلی) در خط‌المرکزین دو دایره (ابتدای پاره‌خط در مرکز دایره‌ای که قوت نسبت به آن سنجیده می‌شود).

زیرا قوت یک نقطهٔ واقع بر یک دایره، نسبت به آن دایره صفر است.

۴۷۳. قضیه. اگر دایره‌ای با دو دایرهٔ مفروض هم‌محور باشد، قوتهای هر نقطهٔ این دایره نسبت به دایره‌های مفروض نسبت ثابتی دارند.

این نسبت، با در نظرگرفتن اندازه و علامت، با نسبت فاصله‌های مرکز دایره از مرکزهای دایرهٔ مفروض

اول و دایرهٔ مفروض دوم برابر است.

فرض کنید P نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ (S) باشد که با دو دایرهٔ مفروض (A) و (B) هم‌محور است. همچنین فرض کنید که u و v قوتهای P نسبت به (A) و (B) باشند. اگر N پای عمودی باشد که از P بر محور اصلی دسته دایرهٔ (A)، (B) و (S) رسم می‌شود، با در نظرگرفتن اندازه و علامت، داریم (§۴۷۲)

$$u = ۲NP \cdot AS \ , \quad v = ۲NP \cdot BS$$

پس،

$$u : v = AS : BS$$

و این نسبت مستقل از محل P برروی (S) است.

۴۷۴. ملاحظه. نسبت $u : v$ (§۴۷۳) بسته به این که S برروی پاره‌خط AB باشد یا خارج آن، منفی یا مثبت است.

۴۷۵. قضیهٔ عکس. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت قوتهایش نسبت به دو دایرهٔ مفروض، با در نظرگرفتن اندازه و علامت ثابت است، دایره‌ای هم‌محور با دایره‌های مفروض است.

اگر P نقطه‌ای از مکان هندسی باشد، مرکز دایرهٔ (S) که از P می‌گذرد و با دایره‌های مفروض (A) و (B) هم‌محور است (§۴۵۱)، خط‌المرکزین AB را به‌طور داخلی (در صورت منفی بودن نسبت مفروض) یا به‌طور خارجی (در صورت مثبت بودن نسبت مفروض) به نسبت مفروض تقسیم می‌کند (§۴۷۴). پس محل مرکز S، و در نتیجه دایرهٔ (S)، با نسبت مفروض، و مستقل از محل P، به‌طور یکتا تعیین می‌شود؛ بنابراین قضیه اثبات می‌شود.

۴۷۶. ملاحظه. اگر نسبت تنها با در نظرگرفتن اندازهٔ مفروض باشد (§۴۷۵) مکان هندسی P از دو دایرهٔ هم‌محور با دایره‌های مفروض تشکیل می‌شود. مرکز این دایره‌ها خط‌المرکزین دایره‌های مفروض را به‌طور داخلی و خارجی به نسبت مفروض تقسیم می‌کنند.

۴۷۷. قضیه. دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ مفروض، با این دایره‌ها هم‌محور است.

اگر P یک نقطهٔ دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ مفروض (A,a) و (B,b) باشد، داریم

$$PA : PB = a : b \qquad \text{یا} \qquad (PA^۲ - a^۲) : (PB^۲ - b^۲) = a^۲ : b^۲$$

پس نسبت قوتهای هر نقطهٔ دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ مفروض، نسبت به این دو دایره ثابت است؛ پس قضیه ثابت می‌شود (§۴۷۵).

۴۷۸. نتیجه. یکی از دو مرکز تشابه دو دایرهٔ غیرمتقاطع بین نقاط حدی دو دایره قرار دارد.

نقاط حدی L و L' برای دو دایرهٔ (A) و (B) نسبت به هر دایرهٔ هم محور با (A) و (B) (§۴۴۸ الف) و به‌خصوص نسبت به دایرهٔ تشابه (A) و (B) (§۴۷۷) وارون یکدیگرند. پس مراکز تشابه S و S' برای دایره‌های (A)و (B)، توسط نقاط L و L' به‌طور همساز تقسیم می‌شوند.

۴۷۹. ملاحظهٔ ۱. اگر از یک نقطهٔ دایرهٔ تشابه دو دایره، بتوان مماسهایی براین دو دایره رسم کرد، نسبت این مماسها با نسبت شعاع دایره‌ها برابر است.

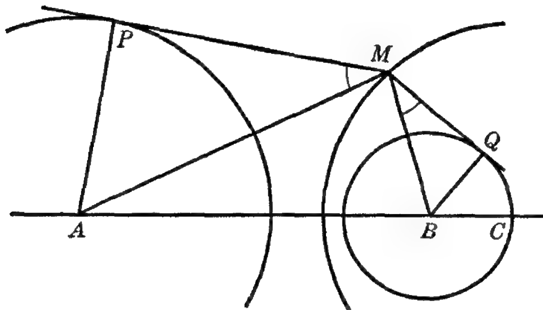
۴۸۰. ملاحظهٔ ۲. دو دایره از هر نقطهٔ دایره تشابه آنها، با زاویه‌های برابر دیده می‌شوند.

زیرا اگر MP و MQ (شکل ۱۱۷) مماسهایی از نقطهٔ M روی دایرهٔ تشابه دایره‌های (A,a) و (B,b)

براین دایره‌ها باشند، داریم (§۴۷۹)

$$MP : MQ = a : b$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MPA و MQB متشابه‌اند.



شکل۱۱۷

۴۸۱. قضیه. دایرهٔ تشابه دو دایره تنها دایره‌ای است که با این دو دایره هم‌محور است و خط‌المرکزین آنها را به‌طور همساز تقسیم می‌کند.

اگر A و B مرکزهای دایره‌های مفروض (A) و (B) باشند، دایره‌هایی به قطر پاره‌خط همساز پاره‌خط AB، یک دسته دایرهٔ هم‌محور (X) تشکیل می‌دهند که نقاط A و B نقاط حدی آن است (§۴۴۸ ب)، و دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ (A) و (B) به (X) تعلق دارد.

از طرف دیگر، دایرهٔ تشابه (S) به دسته دایرهٔ هم‌محور (Z) که توسط دایره‌های (A) و (B) تعیین می‌شود (§۴۷۷)، نیز متعلق است. دو دسته دایرهٔ (X) و (Z) نمی‌توانند بیش از یک دایرهٔ مشترک داشته باشند (§۴۴۱)؛ بنابراین قضیه اثبات می‌شود.

۴۸۲. تعریف. دو دایرهٔ (S) و (S') که با دایره‌های (A) و (B) هم‌محورند و مراکزشان مراکز تشابه دو دایرهٔ (A) و (B) است، دایره‌های پاد متشابه دایره‌های (A) و (B) نامیده می‌شوند.

مرکز تشابه خارجی، یا مستقیم، مرکز دایرهٔ پاد متشابه خارجی، یا مستقیم، است و مرکز تشابه داخلی، یا غیرمستقیم، مرکز دایرهٔ پاد متشابه داخلی، یا غیرمستقیم است.

اگر دو دایرهٔ مفروض متقاطع باشند، هر دو دایرهٔ پاد متشابه حقیقی‌اند، ولی اگر دو دایرهٔ مفروض غیرمتقاطع باشند، تنها یک دایرهٔ پاد متشابه حقیقی است (§۴۷۸).

۴۸۳. قضیه. دو دایرهٔ پاد متشابه دو دایرهٔ متقاطع باهم متعامدند.

دایره‌های متقاطع (A) و (B) مفروض‌اند. دو دایرهٔ پاد متشابه آنها (S) و (S')، و دایرهٔ تشابه آنها، (SS')، هم‌محورند، زیرا هر سه به دسته دایرهٔ تعیین شده توسط (A) و (B) تعلق دارند (§۴۷۷، §۴۸۲)؛ پس قضیه ثابت می‌شود (§۳۶۵ ب).

۴۸۴. قضیه. مکان هندسی نقطهٔ M که قوتهایش نسبت به دو دایرهٔ مفروض، اندازهٔ یکسان و علامت مخالف هم دارند، دایره‌ای هم‌محور با آن دو دایره است.

نسبت قوتهای نقطهٔ متغیر M برای دو دایره مقدار ثابت ۱− است؛ پس قضیه ثابت می‌شود (§۴۷۵).

۴۸۵. تعریف. مکان هندسی M (§۴۸۴) دایرهٔ اصلی دو دایرهٔ مفروض نامیده می‌شود.

۴۸۶. ملاحظه. اگر (A,a) و (B,b) دو دایرهٔ مفروض باشند، برای هر نقطهٔ M از دایره اصلی (L) داریم

$$MA^2 + MB^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{یا} \qquad MA^2 - a^2 = -(MB^2 - b^2)$$

پس مرکز دایرهٔ (L)، یعنی نقطهٔ L، (مکان هندسی ۱۰، ۱۱§) وسط پاره‌خط AB است، و مربع شعاع (L) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - \frac{1}{2}AB^2) \qquad \text{یا} \qquad \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}AB^2 \qquad (1)$$

۴۸۷. بحث. (الف) اگر دایره‌های مفروض متقاطع باشند، دایرهٔ اصلی آنها همیشه حقیقی است، زیرا همواره می‌توان یک دایرهٔ هم‌محور با آنها رسم کرد که مرکزش وسط خط‌المرکزین باشد.

(ب) اگر دایره‌های مفروض (A,a) و (B,b) متقاطع نباشند، دایرهٔ اصلی (L) درصورتی حقیقی است که AB خارج پاره‌خطی باشد که دو انتهایش نقاط حدی دسته دایرهٔ هم‌محور تعیین شده توسط دایره‌های مفروض است. اگر A و B هردو در یک طرف محور اصلی باشند، حتماً این شرط برقرار است، ولی اگر A و B در دو طرف محور اصلی باشند، این شرط ممکن است برقرار باشد و ممکن است برقرار نباشد.

رابطهٔ (۱) آزمایش دیگری را فراهم می‌کند (۴۸۶§). بسته به اینکه $a^2 + b^2 - \frac{1}{2}AB^2$ مثبت، صفر، یا منفی باشد. دایرهٔ اصلی، یک دایرهٔ حقیقی، یک نقطه، یا یک دایرهٔ موهومی است.

(ج) اگر $a^2 + b^2 = AB^2$، یعنی مربع شعاع (L)، با $\frac{1}{4}AB^2$ برابر باشد، یعنی اگر دایره‌های مفروض متعامد باشند، دایرهٔ اصلی آنها دایره‌ای است که خط‌المرکزین دو دایره قطر آن است.

۴۸۸. قضیه. اگر دو وتری که دو دایرهٔ مفروض روی یک مورب جدا می‌کنند همساز باشند، آن‌گاه نقطه‌های وسط این دو وتر روی دایرهٔ اصلی دو دایرهٔ مفروض قرار دارند، و برعکس.

اگر CD و EF دو وتری باشند که دایره‌های (A) و (B) روی یک مورب جدا می‌کنند، و P نقطهٔ وسط CD باشد، قوتهای P نسبت به دو دایرهٔ (A) و (B) به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$PC \cdot PD = -PC^2 \ , \ PE \cdot PF$$

حال اگر $(CDEF) = -1$، داریم (۳۴۶§)

$$PC^2 = PE \cdot PF \qquad (1)$$

و برای نقطهٔ وسط EF هم رابطهٔ مشابهی برقرار است. پس قضیه ثابت می‌شود (۴۸۴§).

برعکس، اگر P روی دایرهٔ اصلی (A) و (B) باشد، بنابر تعریف، داریم

$$PC^2 = PE \cdot PF \qquad \text{یا} \qquad -PC^2 = -PE \cdot PF$$

و دو وتر CD و EF همسازند (۳۴۷§).

۴۸۹. نتیجه. از هر نقطهٔ M روی دایرهٔ اصلی دو دایرهٔ مفروض، در حالت کلی، دو قاطع می‌گذرد که دایره‌های مفروض روی آنها وترهای همساز جدا می‌کنند. این دو قاطع دو خطی هستند که در M بر خطوطی که از M و مرکز دایره‌ها می‌گذرند، عمودند.

ولی باید توجه کرد که با فرض حقیقی بودن دایرهٔ (L)، همیشه می‌توان عمودهایی بر M رسم کرد، اگرچه ممکن است این عمودها دایره‌های مفروض را در نقاط حقیقی قطع نکنند.

۴۹۰. ملاحظه. قاطعی که دو دایرهٔ متعامد برروی آن دو وتر همساز جدا می‌کنند، از مرکز حداقل یکی از دایره‌ها می‌گذرد. زیرا اگر دایره‌های مفروض متعامد باشند، مراکزشان روی دایرهٔ اصلی آنها قرار دارد (§۴۸۷ ج)، و اگر M نقطه‌ای روی دایرهٔ اصلی (L) باشد، و A و B مرکزهای دو دایرهٔ مفروض باشند، عمودی که در M بر AM رسم می‌شود، از روبروی قطری A در دایرهٔ (L)، یعنی B می‌گذرد.

تمرین

۱) دایرهٔ متغیر APQ از نقطهٔ ثابت A می‌گذرد و خط مفروضی را در P و Q قطع می‌کند. قوت A نسبت به دایرهٔ متغیر دیگر (M) که از P و Q می‌گذرد ثابت است. نشان دهید که فاصلهٔ بین مراکز دو دایرهٔ متغیر ثابت است.

۲) دایرهٔ متغیری از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرد و مرکز آن روی یک دایرهٔ ثابت قرار دارد. نشان دهید که محور اصلی دایرهٔ متغیر و دایرهٔ ثابت بر دایرهٔ ثابت دیگری مماس است.

۳) مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که طول مماس رسم شده از آن بر یک دایرهٔ مفروض، واسطهٔ هندسی بین یک پاره‌خط مفروض و فاصلهٔ آن نقطه از یک خط ثابت است.

۴) نشان دهید دایره‌ای که یک نیمساز داخلی مثلثی قطر آن است، با دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی که مرکزش روی نیمساز مذکور است، هم‌محور است. گزارهٔ مشابهی را برای یک نیمساز خارجی بیان و اثبات کنید.

۵) نشان دهید دایره‌ای که دو انتهای یک قطرش مرکز ثقل و مرکز ارتفاعی یک مثلث است، با دایرهٔ محیطی و دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث هم‌محور است.

۶) خطی که از یک نقطهٔ برخورد دو دایره می‌گذرد، آن دایره‌ها را در نقاط P و Q هم قطع می‌کند. نشان دهید که وسط پاره‌خط PQ روی دایرهٔ اصلی آن دو دایره قرار دارد.

۷) از یک نقطهٔ مفروض در صفحه قاطعی رسم کنید، به‌طوری‌که وترهای جدا شده روی آن توسط دو دایرهٔ مفروض همساز باشند.

۸) خطی به موازات یک خط مفروض رسم کنید، به‌طوری‌که دو دایرهٔ مفروض را در دو جفت نقطهٔ همساز قطع کند.

۹) از نقطهٔ مشترک O بین سه دایرهٔ (P)، (Q)، و (R) قاطعی رسم کنید که دایره‌ها را در نقاط A، B، و C قطع کند و نسبت $AB : AC$ مقدار مفروضی باشد.

۱۰) چهار نقطه در صفحه مفروض‌اند. قوت هر نقطه را نسبت به دایره‌ای که از سه نقطهٔ دیگر می‌گذرد به‌دست می‌آوریم. نشان دهید که مجموع معکوس این چهار قوت صفر است.

۱۱) (الف) نشان دهید که قوت یک نقطه نسبت به دایرهٔ اصلی دو دایرهٔمفروض، با نصف مجموع قوتهای آن نقطه نسبت به دو دایرهٔ مفروض برابر است؛ (ب) سه دایره مفروض‌اند، و هردوتایی از آنها یک دایرهٔ اصلی دارند. نشان دهید که مجموع قوتهای یک نقطه نسبت به آن سه دایره، با مجموع قوتهای آن نقطه نسبت به دایره‌های اصلی برابر است.

ح. سه دایره

۴۹۱. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که با سه دایره که مرکزهایشان همخط نیستند متعامد باشد.

مرکز دایرهٔ مطلوب، که آن را R می‌نامیم، لزوماً روی سه محور اصلی دایره‌های (A) و (B)، دایره‌های (B) و (C)، و دایره‌های (C) و (A) قرار دارد (§۴۲۸)؛ پس R نقطهٔ مشترک این سه محور اصلی است (§۴۲۵).

دایرهٔ (R) به مرکز R و متعامد با یکی از دایره‌های (A)، (B)، یا (C) جواب مسئله است.

۴۹۲. تعریف. نقطهٔ R(۴۹۱§) مرکز اصلی یا مرکز تعامد سه دایره نامیده می‌شود.

دایرهٔ (R) را دایرهٔ متعامد سه دایرهٔ مفروض می‌نامند.

۴۹۳. ملاحظه. قوت مرکز اصلی R نسبت به هر سه دایره یکسان است، و R همیشه یک نقطهٔ حقیقی است.

دایرهٔ (R) تنها درصورتی وجود دارد که قوت R نسبت به دایره‌های مفروض مثبت باشد، یا به‌عبارت دیگر، اگر R خارج دایره‌های مفروض باشد.

۴۹۴. قضیه. دایرهٔ متعامد سه دایرهٔ مفروض مکان هندسی نقطه‌ای است که خطوط قطبی آن نسبت به سه دایرهٔ مفروض همرس باشند.

اگر خطوط قطبی نقطهٔ P نسبت به سه دایرهٔ مفروض یکدیگر را در Q قطع کنند، دایرهٔ (PQ) که PQ قطر آن است، با هر سه دایره متعامد است (۳۸۷§)؛ پس (PQ) بر دایرهٔ متعامد (R) برای دایره‌های مفروض منطبق است.

توجه کنید که Q روی دایرهٔ متعامد (R) نیز قرار دارد، و نقاط P و Q در (R) روبروی قطری هم هستند.

۴۹۵. قضیه. اگر (O) دایره‌ای باشد که از مرکزهای سه دایرهٔ مفروض (A,a)، (B,b)، و (C,c) بگذرد، و (R) دایرهٔ متعامد این سه دایره باشد، فاصله‌های A، B، و C از محور اصلی دایره‌های (R) و (O) با $a^۲$، $b^۲$، و $c^۲$ متناسب است.

اگر p فاصلهٔ A از محور اصلی m باشد، آن‌گاه کمیت $۲p \cdot RO$ با تفاضل قوتهای A نسبت به (R) و (O) برابر است (۴۷۱§). این قوتها به‌ترتیب $a^۲$ و صفر هستند، پس،

$$p : a^۲ = ۱ : ۲RO \quad \text{یا} \quad a^۲ = ۲p \cdot RO$$

چون طرف راست این تساوی ثابت است، قضیه ثابت می‌شود.

۴۹۶. قضیه. سه دایرهٔ مفروض که دوبه‌دو در نظر گرفته شوند سه دایرهٔ تشابه هم‌محور دارند.

دایره‌های مفروض (A)، (B)، و (C) هستند و (S_{ab})، یعنی دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ (A) و (B)، با این دو دایره هم‌محور است (۴۷۷§)؛ پس (S_{ab}) با دایرهٔ متعامد (R) برای دایره‌های (A)، (B)، و (C) متعامد است (۴۵۴§).

مرکزهای دایره‌های (A) و (B)، یعنی دو نقطهٔ A و B قطر (S_{ab}) را به‌صورت همساز تقسیم می‌کنند (۳۹۴§)؛ پس A و B نسبت به (S_{ab}) وارون یکدیگرند، و دایرهٔ (O) که از مراکز A، B، و C می‌گذرد با (S_{ab}) متعامد است.

برای دایرهٔ تشابه (B) و (C)، یعنی (S_{bc})، و دایرهٔ تشابه (C) و (A)، یعنی (S_{ca}) نیز رابطهٔ مشابهی برقرار است.

پس سه دایرهٔ تشابه با دو دایرهٔ (R) و (O) متعامدند؛ پس قضیه ثابت می‌شود (۴۵۵§).

۴۹۷. ملاحظه. اگر دایرهٔ (R) وجود نداشته باشد، باز هم قضیه ثابت می‌شود. چون استدلال فوق نشان می‌دهد که قوت R نسبت به سه دایرهٔ تشابه یکسان است، و برای O، مرکز (O)، نیز مطلب مشابهی صادق است؛ پس خط OR محور اصلی هردوتایی از سه دایرهٔ تشابه است.

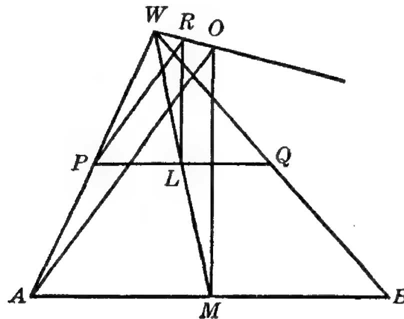
۴۹۸. نتیجه. مراکز سه دایرهٔ تشابه (S_{ab})، (S_{bc})، و (S_{ca}) (§۴۹۶) روی محور اصلی دایره‌های (R) و (O) قرار دارند.

۴۹۹. تعریف. اگر دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل شده از سه دایرهٔ تشابه دایره‌های مفروض (§۴۹۶) دو نقطهٔ اساسی داشته باشند، آنها را نقاط همپویای سه دایرهٔ مفروض می‌نامند.

نقاط همپویای سه دایره نقاط حدی دسته دایرهٔ هم‌محور تعیین شده توسط دایرهٔ متعامد سه دایرهٔ مفروض و دایره‌ای است که از مراکز دایره‌ها می‌گذرد (§۴۵۷).

۵۰۰. قضیه. سه وارون یک نقطهٔ همپویا نسبت به سه دایرهٔ مفروض، از مرکز اصلی دایره‌های مفروض همفاصله‌اند.

فرض کنید W نقطهٔ همپویای سه دایرهٔ (A)، (B)، و (C)، R مرکز اصلی آنها، و O مرکز دایرهٔ $ABC = (O)$ باشد (شکل ۱۱۸).



شکل۱۱۸

وارونهای W نسبت به (A) و (B)، یعنی نقاط P و Q، روی خطی موازی با AB قرار دارند (§۴۳۸)؛ پس نقاط L و M، وسطهای PQ و AB، با W همخط‌اند. عمودمنصفهای PQ و AB به‌ترتیب از R و (O) می‌گذرند؛ پس، (§۴۳۸)

$$WP : WA = WL : WM = WR : WO$$

در نتیجه، خطوط PR و AO موازی‌اند، و داریم

$$RP : OA = WR : WO$$

سه جملهٔ آخر این تناسب به دایرهٔ در نظر گرفته شدهٔ (A) بستگی ندارند؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

۵۰۱. ملاحظه. اگر (R') دایره‌ای باشد که از وارونهای W نسبت به سه دایرهٔ مفروض می‌گذرد، نقطهٔ W خط‌المرکزین دو دایرهٔ (O) و (R')، یعنی پاره‌خط RO، را به نسبت شعاعهای دایره‌های (O) و (R')، یعنی OA و RP، تقسیم می‌کند؛ پس W مرکز تشابه این دو دایره است.

۵۰۲. قضیه. اگر شعاعهای سه دایرهٔ متغیر که مراکز ثابت دارند طوری تغییر کنند که باهم متناسب بمانند، دایره‌های متعامد آنها یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

نسبت شعاعهای هردو دایره‌ای از این سه دایرهٔ متغیر ثابت است، پس مراکز تشابه این دو دایره ثابت است. همین مطلب در مورد دایرهٔ تشابه آنها نیز صادق است. سه دایرهٔ تشابه هم‌محور، و با دایرهٔ متعامد (R)

برای دایره‌های مفروض، متعامدند (§۴۹۶)؛ پس (R) یک دسته دایرهٔ هم‌محور مزدوج با دسته دایرهٔ تعیین شده توسط دایره‌های تشابه را توصیف می‌کند.

۵۰۳. قضیه. سه نقطهٔ ناهمخط و یک خط مفروض‌اند؛ می‌توان سه دایره به مرکز این نقاط رسم کرد به‌طوری که خط مفروض یک محور تشابه آن سه دایره باشد.

فرض کنید Y و Z نقاط برخورد خط مفروض با اضلاع AC و AB از مثلث ABC باشند که A، B، و C سه نقطهٔ مفروض‌اند؛ فرض کنید Y' و Z' مزدوجهای همساز Y و Z نسبت به دو جفت نقطهٔ A، C و A، B باشند؛ و فرض کنید (YY') و (ZZ') دایره‌هایی باشند که YY' و ZZ' قطر آنها هستند.

دایرهٔ (A) به مرکز A و شعاع دلخواه، دایرهٔ (B) به‌مرکز B و هم محور با (A) و (ZZ')، و دایرهٔ (C) به‌مرکز C و هم‌محور با (A) و (YY') سه دایره‌ای هستند که ویژگی مطلوب را دارند.

دایرهٔ (ZZ') با (A) و (B) هم‌محور است و خط‌المرکزین این دو دایره، یعنی پاره‌خط AB، را به‌طور همساز تقسیم می‌کند؛ پس (ZZ') دایرهٔ تشابه (A) و (B) است (§۴۸۱) و Z یک مرکز تشابه این دو دایره است.

به‌طور مشابه، Y یک مرکز تشابه دو دایرهٔ (A) و (C) است و قضیه ثابت می‌شود (§۴۰۷).

باید توجه کنید که X، محل برخورد خط مفروض YZ و BC، یک مرکز تشابه دو دایرهٔ (B) و (C) است و دایرهٔ تشابه (XX') برای دایره‌های (B) و (C)، توسط X و مزدوج همساز آن نسبت به نقاط B و C، یعنی نقطهٔ X'، تعیین می‌شود.

۵۰۴. ملاحظه. شعاع (A) را به‌دلخواه برگزیدیم؛ پس می‌توان سه دایره را به بی‌نهایت شکل مختلف رسم کرد، ولی شعاعهای مجموعه دایره‌های رسم شده متناسب خواهد بود.

۵۰۵. قضیه. سه دایرهٔ (A)، (B) و (C) مفروض‌اند؛ اگر (D) و (E) به‌ترتیب دایره‌های اصلی (A)، (B) و (A)، (C) باشند، آن‌گاه محور اصلی دایره‌های (D) و (E) بر محور اصلی دایره‌های (B) و (C) منطبق است.

دایره‌های (D) و (E) به‌ترتیب با دو جفت دایرهٔ (B)، (A) و (C)، (A) هم‌محورند؛ پس قوتهای مرکز اصلی سه دایره، یعنی نقطهٔ R، نسبت به دایره‌های (D) و (E) برابرند، زیرا با قوت R نسبت به (A) برابرند. بنابراین، محورهای اصلی دو جفت دایرهٔ (D)، (E) و (B)، (C) دو عمودی هستند که از مرکز اصلی R به خطوط DE و BC رسم می‌شوند. ولی DE و BC موازی‌اند، زیرا D نقطهٔ وسط AB و E نقطهٔ وسط AC است (§۴۸۶)، پس قضیه ثابت می‌شود.

تمرین

۱) مربع شعاعهای سه دایرهٔ مفروض را به مقدار مساوی زیاد، یا کم می‌کنیم. نشان دهید که مرکز اصلی سه دایره تغییر نمی‌کند.

۲) نشان دهید مرکز اصلی سه دایره‌ای که قطرهایشان اضلاع یک مثلث هستند، مرکز ارتفاعی آن مثلث است.

۳) نشان دهید که مرکز ارتفاعی مثلث ABC مرکز اصلی سه دایره‌ای است که قطرهایشان سه پاره‌خط سِوایی AP، BQ، و CR هستند.

۴) دایره‌ای رسم کنید که مماسهای رسم شده به آن از سه نقطهٔ مفروض دارای طولهای مفروضی باشند.

۵) سه دایره مفروض‌اند، نقطه‌ای بیابید که با سه وارونش نسبت به سه دایرهٔ مفروض چهار نقطهٔ همدایره تشکیل دهد.

۶) سه دایرهٔ نامتقاطع مفروض‌اند. هر دوتایی از این دایره‌ها دو نقطهٔ حدی دارند، نشان دهید که این سه‌جفت نقطهٔ حدی همدایره‌اند.

۷) سه دایره مفروض‌اند. نشان دهید سه‌محور پاد اصلی این دایره‌ها، که دوبه‌دو در نظر گرفته شوند، همرس‌اند.

۸) اگر هریک از سه دایرهٔ مفروض بر دو دایرهٔ دیگر مماس باشند، نشان دهید که دایرهٔ متعامد آنها یک دایرهٔ سه مماس مثلثی است که رأسهای آن مراکز سه دایرهٔ مفروض‌اند.

۹) سه دایره مفروض‌اند، دایرهٔ چهارمی رسم کنید که محورهای اصلی آن با هریک از آن سه دایره به‌ترتیب از سه نقطهٔ مفروض بگذرند.

۱۰) سه‌دایره با مرکزهای ناهمخط مفروض‌اند. نشان دهید که از شش دایرهٔ پاد متشابه آنها، وقتی دوبه‌دو در نظر گرفته می‌شوند، هر سه‌تایی که مراکزشان همخط باشد، هم‌محورند.

۱۱) نشان دهید که فواصل یک نقطهٔ همپویای سه دایره از مراکز این دایره‌ها، با شعاع دایره‌های متناظر، متناسب‌اند.

۱۲) سه دایرهٔ (A)، (B)، و (C) مفروض‌اند و خطی موازی با BC، AB را در D و AC را در E قطع می‌کند. (D) دایره‌ای به‌مرکز D و هم‌محور با (A) و (B)، و (E) دایره‌ای به مرکز E و هم محور با (A) و (C) است. نشان دهید که محور اصلی (D) و (E) بر محور اصلی (B) و (C) منطبق است.

۱۳) (الف) روی سه ضلع یک مثلث سه جفت نقطه مشخص شده است، به‌طوری‌که هر دو جفتی از آنها چهار نقطهٔ همدایره‌اند. نشان دهید که هر سه‌جفت نقطه روی یک دایره‌اند؛ (ب) اگر سه جفت نقطهٔ A'، A''؛ B'، B''؛ C'، C'' به‌ترتیب روی سه ضلع BC، CA، و AB از مثلث ABC مشخص شده باشند، به‌طوری‌که

$$AC' \cdot AC'' = AB' \cdot AB'', BA' \cdot BA'' = BC' \cdot BC'', CB' \cdot CB'' = CA' \cdot CA''$$

نشان دهید که این سه جفت نقطه همدایره‌اند.

تمرینهای تکمیلی

۱) نشان دهید پای ارتفاعی که از مرکز ارتفاعی یک مثلث بر خط واصل بین یک رأس و نقطهٔ برخورد ضلع مقابل آن رأس با ضلع متناظر مثلث ارتفاعی، رسم می‌شود روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد.

۲) از مثلثی محل مرکز ارتفاعی، محل یک رأس و محل نقطهٔ برخورد ضلع مقابل آن رأس با ضلع متناظر مثلث ارتفاعی مفروض است، مثلث را رسم کنید.

۳) نشان دهید که پاد مرکز یک چهارضلعی محاطی، نسبت به دایره‌هایی که قطرهایشان دو ضلع روبروی هم در چهار ضلعی هستند، قوتی یکسان دارد.

۴) سه دایره با مراکز ناهمخط و یک نقطه مفروض‌اند. سه دایره رسم می‌کنیم که از نقطهٔ مفروض بگذرند و هرکدام با دو دایره از سه دایرهٔ مفروض هم‌محور باشند، نشان دهید که این سه دایره یک نقطهٔ مشترک دیگر نیز دارند.

۵) روی یک دایره چهار نقطهٔ دلخواه A، B، C، و D مشخص شده است؛ AC و BD در E؛ AB و CD در F؛ و AD و BC در G یکدیگر را قطع می‌کنند. نشان دهید که دایره‌های محیطی مثلثهای EAB و ECD خطوط AD و BC را در چهار نقطه قطع می‌کنند که روی دایرهٔ چهارمی قرار دارند. همچنین نشان دهید که اگر این چهار دایره را سه‌به‌سه در نظر بگیریم، مراکز اصلی حاصل رأسهای یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۶) سه‌دایره مفروض‌اند. دایره‌ای رسم کنید که بر دایرهٔ اول مماس باشد، با دایرهٔ دوم متعامد باشد، و دایرهٔ

سوم را نصف کند.

۷) مورب DEF امتداد اضلاع BC، CA و AB از مثلث ABC را در نقاط D، E، و F قطع می‌کند. سه دایره‌ای که این نقاط مراکزشان هستند و با دایرهٔ محیطی ABC متعامدند، امتداد اضلاع متناظر را در P، Q، و R و خود اضلاع را در P'، Q' و R' قطع می‌کنند. نشان دهید که سه‌تایی‌های P, Q, R؛ P, Q', R'؛ P', Q, R'؛ و R, Q', P' نقاط همخط‌اند و سه‌تایی‌های AP'، BQ'، CR'؛ AP'، BQ، CR؛ AP، BQ'، CR؛ و AP، BQ، CR' خطوط همرس‌اند.

ط. مسئلهٔ آپولونیوس

۵۰۶. ده مسئله. مسئلهٔ تعیین دایره‌ای را که سه شرط از شرطهای زیر را داشته باشد در نظر بگیرید؛ شرط P: دایره از نقطهٔ مفروضی بگذرد؛ شرط L: دایره بر خط مفروضی مماس باشد؛ شرط C: دایره بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد. به‌این ترتیب ده مسئله خواهیم داشت که می‌توان آنها را به‌صورت نمادین زیر نشان داد (۱) PPP، (۲) PPL، (۳) PLL، (۴) LLL، (۵) PPC، (۶) PLC، (۷) PCC، (۸) LLC، (۹) LCC، (۱۰) CCC.

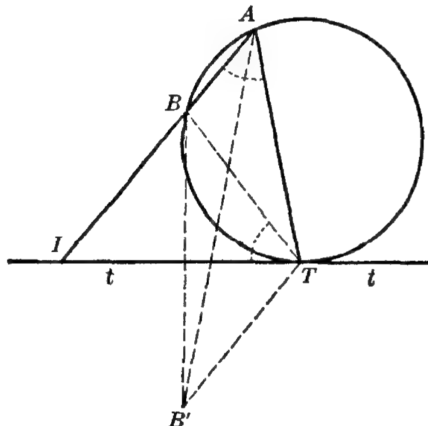
۵۰۷. مسئلهٔ ۱. دایره‌ای رسم کنید که از سه نقطهٔ مفروض بگذرد (PPP).

۵۰۸. مسئلهٔ ۲. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و بر خط مفروضی مماس باشد (PPL)(§۴۵۲).

راه دیگر. فرض کنید A و B دو نقطهٔ مفروض باشند، خط AB خط مفروض t را در I قطع کند، و t در T بر دایرهٔ مطلوب ABT مماس باشد (شکل ۱۱۹). اگر B' متقارن B نسبت به t باشد، تساویهای زیر را بین زاویه‌ها داریم

$$\angle ATB' = \angle ATB + \angle BTB' = \angle ATB + \angle BTI + \angle BTI$$
$$= \angle ATB + \angle BAT + \angle BTI = \angle IBT + \angle BTI$$
$$= 180^\circ - \angle BIT$$

پس پاره‌خط معلوم AB' از نقطهٔ T با زاویهٔ معلومی دیده می‌شود؛ پس T را می‌توان تعیین کرد (مکان هندسی ۷، §۱۱).



شکل۱۱۹

متقارن T نسبت به I جواب دیگری را برای مسئله به دست می‌دهد.

۵۰۹. مسئلهٔ ۳. دایره‌ای رسم کنید که بر دو خط مفروض مماس باشد و از یک نقطهٔ مفروض بگذرد (PLL).

دایرهٔ مطلوب از P'، متقارن P نسبت به نیمساز زاویه‌ای که دو خط تشکیل می‌دهند، نیزمی‌گذرد و مسئله به مسئلهٔ قبل تبدیل می‌شود.

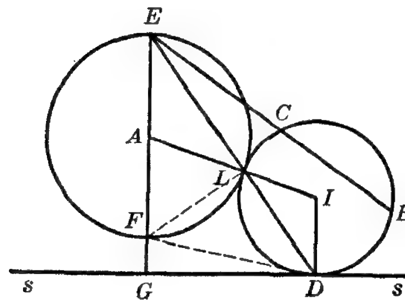
۵۱۰. مسئلهٔ ۴. دایره‌ای رسم کنید که بر سه خط مفروض مماس باشد (LLL)(§۱۱۷).

حالتی را در نظر بگیرید که دو خط، یا هر سه خط، موازی باشند.

۵۱۱. مسئلهٔ ۵. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد (PPC)(§۴۷۰).

۵۱۲. مسئلهٔ ۶. دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطهٔ مفروض بگذرد و بر یک خط و یک دایرهٔ مفروض مماس باشد (PLC).

فرض کنید دایرهٔ مطلوب (I) (شکل ۱۲۰) از نقطهٔ مفروض B بگذرد، بر دایرهٔ مفروض (A) در نقطهٔ L و بر خط مفروض s در نقطهٔ D مماس باشد. نقطهٔ L یک مرکز تشابه دو دایره است، پس خط LD از یک انتهای قطر EF از دایرهٔ (A) که با شعاع ID از دایره (I) موازی است می‌گذرد. پس نقطهٔ E معلوم است، زیرا EF قطر عمود بر خط s از دایرهٔ (A) است.



شکل ۱۲۰

فرض کنید EF خط s را در G قطع کند. قطر EF از نقطهٔ L بازاویهٔ قائمه دیده می‌شود؛ پس DF هم از L و هم از G با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود و $LFGD$ یک چهار ضلعی محاطی است. پس داریم

$$EF \cdot EG = EL \cdot ED = EB \cdot EC$$

و پاره‌خط EC را می‌توانیم به عنوان جزءِ چهارم تناسب رسم کنیم. این پاره‌خط نقطهٔ C را روی خط EB تعیین می‌کند، و مسئله به مسئله (PPL) تبدیل می‌شود، و دو جواب برای مسئلهٔ عنوان شده به دست می‌آید.

می‌توان کاری کرد که F نقش E را داشته باشد، به این ترتیب دو جواب دیگر به‌دست می‌آید، و مسئله چهار جواب دارد.

۵۱۳. مسئلهٔ ۷. دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطهٔ مفروض بگذرد و بر دو دایرهٔ مفروض مماس باشد (PCC).

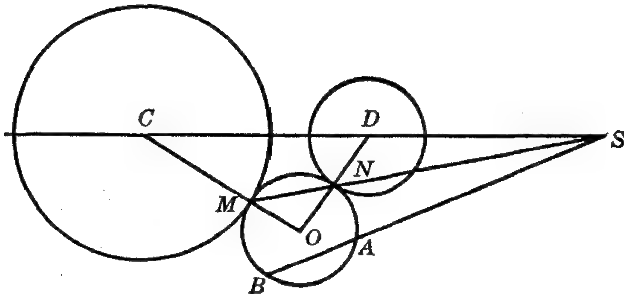
نقاط تماس دایرهٔ مطلوب (O) (شکل ۱۲۱) با دایره‌های مفروض (C) و (D) را به ترتیب، M و N می‌نامیم. این دو نقطه با مرکز تشابه دایره‌های (C) و (D)، یعنی نقطهٔ S، همخط‌اند (§۴۰۹)؛ پس اگر SA،

یعنی خطی که از S و نقطهٔ مفروض A بر روی (O) می‌گذرد، (O) را در نقطهٔ B هم قطع کند، آن‌گاه داریم

$$SA \cdot SB = SM \cdot SN$$

طرف راست تساوی فوق مقداری معلوم است (§۴۰۰)؛ پس B را می‌توان روی خط مفروض SA تعیین کرد و مسئله به حالت (PPC) تبدیل می‌شود، و دو جواب برای مسئله عنوان شده به‌دست می‌آید.

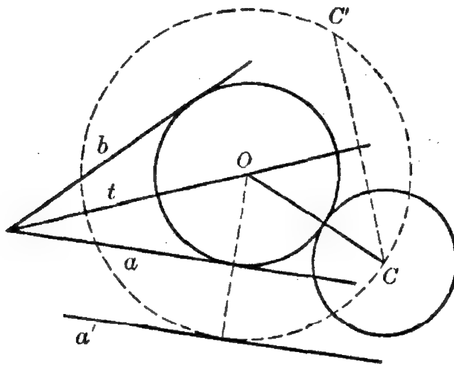
با استفاده از مرکز تشابه دیگر دایره‌های (C) و (D)، یعنی S' دو جواب دیگر برای مسئله به دست می‌آید، و مسئله روی هم رفته چهار جواب دارد.



شکل۱۲۱

۵۱۴. مسئلهٔ ۸. دایره‌ای رسم کنید که بر دو خط و یک دایرهٔ مفروض مماس باشد (LLC).

فرض کنید a و b دو خط مفروض، (C, c) دایرهٔ مفروض، و (O, r) دایرهٔ مطلوب باشند. دایرهٔ $(O, r+c)$ (شکل ۱۲۲) از نقطهٔ C و متقارن C نسبت به نیمساز زاویهٔ متشکل از a و b، یعنی نقطهٔ C'، هم می‌گذرد زیرا O روی نیمساز t قرار دارد. به‌علاوه، $(O, r+c)$ بر خط a'، که به فاصلهٔ c از a و به موازات a قرار دارد، نیز مماس است. پس ترسیم $(O, r+c)$ یک مسئلهٔ (PPL) است، و با ترسیم آن، O، مرکز (O, r)، تعیین می‌شود.

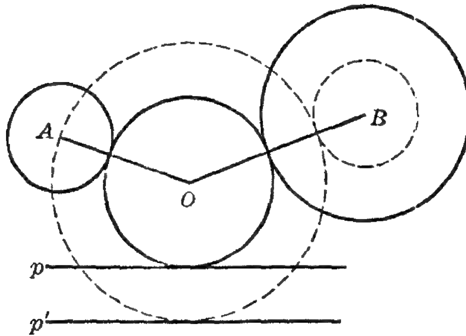


شکل۱۲۲

مسئلهٔ (PPL) دو جواب دارد. متقارن C را می‌توان نسبت به هر یک از دو نیمساز زاویهٔ بین a و b، تعیین کرد و خط موازی a، یعنی a' را می‌توان در هر یک از دو طرف a رسم کرد؛ پس مسئلهٔ (LLC) می‌تواند هشت جواب داشته باشد.

۵۱۵. مسئلهٔ ۹. دایره‌ای مماس بر یک خط و دو دایرهٔ مفروض، رسم کنید (LCC).

فرض کنید p خط مفروض، (A,a) و (B,b) دایره‌های مفروض، و (O,r) دایرهٔ مطلوب باشد (شکل ۱۲۳). اگر a کوچکتر از b باشد، دایرهٔ $(O,r+a)$، از نقطهٔ A می‌گذرد، بر دایرهٔ $(B,b-a)$ مماس است، و بر خط p' که به فاصلهٔ a به موازات p رسم می‌شود نیز مماس است. پس ترسیم $(O,r+a)$ یک مسئلهٔ (PLC) است و بارسم آن مرکز O مشخص می‌شود.



شکل۱۲۳

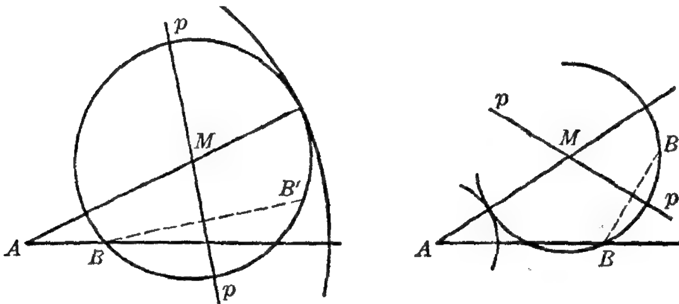
چون مسئلهٔ (PLC) چهار جواب دارد، و p' را می‌توان در هر دو طرف p رسم کرد، مسئلهٔ (LCC) می‌تواند هشت جواب داشته باشد.

۵۱۶. مسئلهٔ ۱۰. مسئلهٔ آپولونیوس. دایره‌ای مماس بر سه دایرهٔ مفروض رسم کنید (CCC).

فرض کنید که (A,a)، (B,b)، و (C,c) دایره‌های مفروض باشند و (O,r) دایرهٔ مطلوب باشد. اگر a کوچکترین شعاع مفروض باشد، دایرهٔ $(O,r+a)$ از A می‌گذرد و بر دایره‌های $(B,b-a)$ و $(C,c-a)$ مماس است. پس ترسیم $(O,r+a)$ یک مسئلهٔ (PCC) است و O تعیین می‌شود. مسئله می‌تواند هشت جواب داشته باشد.

۵۱۷. مسئله. روی یک خط مفروض نقطه‌ای تعیین کنید که مجموع (یا تفاضل) فاصله‌هایش از دو نقطهٔ مفروض مقدار مفروضی باشد.

فرض کنید که p خط مفروض، A و B نقاط مفروض، m طول مفروض و M نقطهٔ مطلوب روی p باشد. دایرهٔ (M,MB) (شکل ۱۲۴) از متقارن B نسبت به p می‌گذرد و بر دایرهٔ (A,m) مماس است؛ پس (M,MB) را می‌توان رسم کرد (§۵۱۱) و به این ترتیب M مشخص می‌شود.



شکل۱۲۴

تمرین

۱) نقطهٔ A خارج دایرهٔ (O) مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که بر دایرهٔ (O) و خط OA مماس و مرکزش روی خط مماس از A بر (O) باشد.

۲) دایره‌ای رسم کنید، به طوری که وترهایی که از برخورد آن باسه دایرهٔ مفروض تعیین می‌شوند، طولهای مفروضی داشته باشند.

۳) از مثلثی قاعده، ارتفاع وارد بر قاعده و مجموع (یا تفاضل) طول اضلاع دیگر آن مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

۴) از مثلثی قاعده، مجموع (یا تفاضل) طول دو ضلع دیگر، و زاویه‌ای که میانهٔ وارد بر قاعده با قاعده می‌سازد مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۵) از مثلثی قاعده، ارتفاع وارد بر قاعده، و مجموع طول میانه‌های وارد بر اضلاع جانبی (a, h_a, m_b+m_c) مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

۶) نقطهٔ P روی ضلع AB از مثلث ABC مفروض است. نقطهٔ Q را روی AC طوری تعیین کنید که طول PQ با مجموع فاصله‌های نقاط P و Q از ضلع BC برابر باشد.

۷) روی یک خط مفروض نقطه‌ای بیابید که مجموع طول مماسهایی که از آن بر دو دایرهٔ مفروض رسم می‌شوند مقدار مفروضی باشد.

تمرینهای تکمیلی

۱) اگر G مرکز ثقل مثلث ABC باشد، نشان دهید که قوتهای رأسهای A، B،و C به ترتیب نسبت به دایره‌های GBC، GCA، و GAB، برابرند.

۲) نقطهٔ M را روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC طوری تعیین کنید که داشته باشیم $MA^۲ = MB \cdot MC$.

۳) ABC یک مثلث، A' نقطهٔ وسط BC و P قطب BC نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث است. از نقطهٔ وسط $A'P$ خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تاAB و AC، یا ادامهٔ آنها، را در Q و R قطع کند؛ نشان دهید که A، P، Q، و R همدایره هستند.

۴) دو نقطهٔ P و Q روی دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC مفروض‌اند. دو دایره رسم می‌کنیم که از این دو نقطه بگذرند و در A' و A'' بر BC مماس باشند. B' و B''، و C' و C'' را نقاط متناظری روی اضلاع CA و AB فرض کنید. با فرض اینکه A'، B'، C' خارج (O) و A''، B''، C'' داخل (O) باشند، نشان دهید که (C', B', A')، (C'', B'', A')، (C'', B', A'')، (C', B'', A'') نقاط همخط هستند و (CC'', BB'', AA'')، (AA'', BB', CC')، (AA', BB'', CC')، و (CC'', BB', AA') خطوط همرس‌اند.

۵) نشان دهید که نسبت فاصله‌های مراکز دو دایره از محور اصلی آنها، با نسبت فاصله‌های این خط از قطبهایش نسبت به دایره‌ها برابر است.

۶) سه دایره با مرکزهای A، B، C در نقطهٔ D مشترک‌اند و یکدیگر را دو به دو در نقاط A'، B'، و C' قطع می‌کنند. وتر مشترک DC' در دو دایرهٔ اول، دایرهٔ سوم را در C'' قطع می‌کند. A'' و B'' را نقاط متناظری روی دو دایرهٔ دیگر فرض کنید. ثابت کنید که پاره‌خطهای $A'A''$، $B'B''$ و $C'C''$ دو برابر ارتفاعهای مثلث ABC هستند.

۷) دو دایرهٔ (O, R) و (O', R') چنان‌اند که می‌توان چهار ضلعیهایی رسم کرد که محاط در (O, R) و محیط بر (O', R') باشند.

اگر $c = OO'$، ثابت کنید که (الف) $(R^۲ - c^۲)^۲ = ۲R'^۲(R^۲ + c^۲)$؛ (ب) $R^۲$ نمی‌تواند کوچکتر از $۲R'^۲$ باشد؛ (ج) اگر $R^۲ = ۲R'^۲$ دایره‌ها هم‌مرکزند و همهٔ چهارضلعیها مربع‌اند.

۸) روی مماسی بر یک دایره، دو نقطه به فاصله‌ای یکسان از یک نقطهٔ ثابت این خط مماس مشخص شده است. نشان دهید که مکان هندسی تلاقی دو مماسی که از این دو نقطه بر دایره رسم می‌شوند، یک خط راست است.

۹) در یک اتاق دایره‌ای شکل، یک گوی را باید در چه جهتی روی کف اتاق بغلتانیم تاپس از دو انعکاس حاصل از برخورد با دیوار، از محل اولیه‌اش بگذرد؟

۱۰) سه دایره رسم شده‌اند که هر سه در یک نقطه بر دایرهٔ محیطی یک مثلث مماس خارجی‌اند و هر کدام بر یکی از اضلاع آن مثلث مماس‌اند. ثابت کنید که (الف) نقاط تماس با اضلاع مثلث همخط‌اند؛ (ب) اگر این دایره‌ها بر دایرهٔ محیطی مماس داخلی باشند، نقاط تماس بااضلاع مثلث پاهای سه خط سوایی همرس‌اند.

۱۱) از یک مثلث محل دایرهٔ محاطی داخلی، محل وسط یک ضلع، و محل نقطه‌ای روی نیمساز خارجی زاویهٔ مقابل آن ضلع مفروض است. این مثلث را رسم کنید.

۱۲) مماس مشترک دایره‌های (O) و (O') در نقاط A و A' بر این دو دایره مماس‌اند. از یک نقطهٔ ثابت AA' قاطع متغیری رسم می‌کنیم که (O) را در B و C و (O') را در B' و C' قطع کند. نشان دهید مکان هندسی نقاط برخورد خطوط AB و AC با خطوط $A'B'$ و $A'C'$ دایره‌ای هم‌محور با دایره‌های (O) و (O') است.

۱۳) دایرهٔ متغیر (M) در I بر دایرهٔ مفروض (O) مماس است و با دایرهٔ دیگر (O') متعامد است وآن‌را در H و K قطع می‌کند. اگر خطوط HK و IO' یکدیگر را در P قطع کنند و IO' دایرهٔ (M) را در N هم قطع کند، نشان دهید که (الف) خطوط MN و MP خط OO' را در دو نقطهٔ ثابت قطع می‌کنند؛ (ب) دایرهٔ متغیر (M) بر یک دایرهٔ ثابت دیگر مماس است.

۱۴) در یک مثلث سه خط سِوایی همرس داریم؛ سه دایره رسم می‌کنیم به‌طوری که هر کدام از خطوط سِوایی قطر یکی از آنها باشد. از مرکز ارتفاعی مثلث بر هر یک از خطوط سوایی عمودی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ متناظر با آن خط را در دو نقطه قطع کند. نشان دهید که شش نقطه‌ای که به این ترتیب تعیین می‌شوند همدایره‌اند.

۱۵) در یک مثلث سه خط سِوایی همرس داریم؛ سه‌دایره رسم می‌کنیم به‌طوری که هر ضلع مثلث قطر یکی از آنها باشد. از مرکز ارتفاعی مثلث بر هر یک از خطوط سِوایی عمودی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ متناظر را در دو نقطه قطع کند. نشان دهید که شش نقطه‌ای که به این ترتیب تعیین می‌شوند، همدایره‌اند.

۱۶) سه دایره رسم کرده‌ایم که قطر هر کدام یکی از سه خط سِوایی همرس یک مثلث است. سه‌دایره نیز رسم کرده‌ایم که قطر هر کدام یکی از اضلاع همان مثلث است. هر دایرهٔ رسم شده روی خط سوایی، دایرهٔ رسم شده روی ضلع متناظر را در دو نقطه قطع می‌کند. نشان دهید شش نقطه‌ای که به‌این ترتیب حاصل می‌شود، همدایره‌اند.

۱۷) خط راستی رسم می‌کنیم که از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC بگذرد و اضلاع BC، CA و AB را در P، Q، و R قطع کند؛ ثابت کنید دایره‌هایی که AP، BQ، و CR قطرهایشان هستند دو نقطهٔ مشترک دارند، یکی روی دایرهٔ محیطی و دیگری روی دایرهٔ نه نقطه. همچنین، نشان دهید که وتر مشترک دایره‌ها از مرکز ارتفاعی مثلث می‌گذرد. اگر P'، Q'، و R' متقارنهای P، Q، و R نسبت به مرکز دایرهٔ‌محیطی مثلث، یعنی نقطهٔ O، باشند، نشان دهید که خطوط AP'، BQ' و CR' یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۱۸) سه دایره رسم کنید که هر کدام از دو رأس یک مثلث بگذرند و بر دایرهٔ محاطی داخلی آن عمود باشند. نشان دهید که (الف) مثلثی که رأسهای آن مراکز این سه دایره‌اند، با مثلثی که رأسهای آن نقاط تماس

دایرهٔ محاطی داخلی‌اند، متجانس است؛ (ب) مراکز دایره‌های محیطی این دو مثلث بر هم منطبق‌اند، و تفاضل شعاعهای دایره‌های محیطی با نصف شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث اصلی برابر است. دایره‌های محاطی خارجی را نیز در نظر بگیرید.

۱۹) دو نقطهٔ ثابت A و B مفروض‌اند. خط متغیری را در نظر می‌گیریم که از نقطهٔ ثابت دیگری می‌گذرد. دو دایره رسم شده‌اند که به‌ترتیب، از A و B می‌گذرند و بر خط مذکور در M و N مماس‌اند. ثابت کنید دایره‌ای که از M، N، و A (یا B) می‌گذرد، از نقطهٔ ثابت دیگری نیز می‌گذرد.

۲۰) اگر S یک مرکز تشابه دو دایرهٔ متعامد متقاطع در نقاط A و C باشد، و اگر B و D نقاط برخورد خط‌المرکزین دایره‌ها با خطوط قطبی S نسبت به این دو دایره باشند، ثابت کنید که $ABCD$ یک مربع است.

۲۱) از دو دایره، دو مرکز تشابه، طول یک مماس مشترک و راستای مماس مشترک دیگر مفروض‌اند. دو دایره را رسم کنید.

۲۲) مکان هندسی نقطهٔ P را که مماسهای PA، PB و PC رسم شده از آن نقطه بر سه دایرهٔ هم‌محور مفروض در رابطهٔ $PA \cdot PB : PC^2 = k$ صدق می‌کنند، به دست آورید.

۲۳) دو نقطهٔ متغیر C و D روی خط ثابت s قرار دارند و از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ مفروض (O) همفاصله‌اند. از این دو نقطه مماسهای CE و DF را بر (O) رسم می‌کنیم. این دو مماس یکدیگر را در M قطع می‌کنند. (الف) مکان هندسی M را بیابید؛ (ب) مکانهای هندسی مرکز دایرهٔمحاطی داخلی و مرکز ارتفاعی مثلث MEF را بیابید. (ج) اگر P نقطهٔ مفروضی باشد، مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی PEF را بیابید.

۲۴) دو دایره یکدیگر را در A و B قطع می‌کنند و در C و D بر یک دایرهٔ دیگر مماس‌اند. نشان دهید که $AC : AD = BC : BD$.

۲۵) دو دایرهٔ متقاطع داریم که یک دایرهٔ متغیر بر آنها مماس است. نشان دهید که خط قطبی یک نقطهٔ مشترک دو دایرهٔ متقاطع نسبت به دایرهٔ متغیر از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرد. (فرض می‌کنیم که دایرهٔ متغیر به یک شیوه بر دو دایرهٔ متقاطع مماس است، یعنی هر دو مماس داخلی هستند یا خارجی.) نشان دهید اگر دو دایرهٔ مفروض مماس باشند، این قضیه برای نقطهٔ تماس آن دو دایره نیز صادق است.

۲۶) نشان دهید سه وتر تقاطع دایرهٔ محیطی یک مثلث با دایره‌های محاطی خارجی، اضلاع متناظر مثلث را در سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند.

۲۷) اگر سه مماس p، q، و r که از رأسهای یک مثلث بر دایرهٔ (S) رسم می‌شوند چنان باشند که یکی از حاصل‌ضربهای ap، bq و cr با مجموع دو حاصل‌ضرب دیگر برابر باشد، ثابت کنید که (S) بر دایرهٔ محیطی مثلث مماس است. a، b، و c طول اضلاع مثلث هستند.

۲۸) چهار دایره می‌توان رسم کرد که بر اضلاع AB و AC از مثلث ABC و دایرهٔ محیطی مثلث (O) مماس باشند. نشان دهید هر یک از چهار خط قطبی A نسبت به این چهار دایره، از یکی از مراکز سه مماس مثلث ABC می‌گذرد.

۲۹) (الف) دو دایرهٔ متعامد (A) و (B) مفروض‌اند. نشان دهید که دایرهٔ اصلی (A) و (B) دایرهٔ تشابه دایره‌های پادمتشابه (A) و (B) است. (ب) دایره‌های (A) و (B) دایره‌های پادمتشابه دایره‌های پادمتشابه (A) و (B) هستند.

۳۰) نشان دهید که مرکز تجانس مثلثهای ارتفاعی و مماسی مثلث مفروض (T) (§۱۹۱) قطب محور ارتفاعی (T) نسبت به دایرهٔ محیطی (T) است.

۹

انعکاس

۵۱۸. چند تعریف. اگر یک نقطهٔ O به عنوان مرکز یا قطب انعکاس، و یک ثابت k به عنوان ثابت انعکاس مفروض باشند، به هر نقطهٔ P از صفحه، نقطهٔ P' روی خط OP، را متناظر می‌کنیم به طوری که داشته باشیم $OP \cdot OP' = k$. نقطهٔ P' منعکس نقطهٔ P نام دارد. واضح است که P نیز منعکس P' است.

اگر ثابت k مثبت باشد، دو نقطهٔ P و P' در یک طرف مرکز انعکاس O گرفته می‌شوند؛ اگر k منفی باشد، نقاط P و P' در دو طرف O قرار می‌گیرند.

اگر ثابت انعکاس k مثبت باشد، دایرهٔ (O) به مرکز O و شعاع $\sqrt{k}$، دایرهٔ انعکاس نامیده می‌شود. هر نقطهٔ روی محیط (O) برمنعکس خودش منطبق است، و اگر P و P' منعکس هم باشند، نسبت به دایرهٔ (O) وارون هم خواهند بود (§۳۵۸). شعاع (O) را شعاع انعکاس می‌نامند.

خط OP، که از P به مرکز انعکاس O رسم می‌شود، بردار شعاع P نامیده می‌شود.

انعکاس به مرکز O و ثابت k را گاهی با نماد (O, k) نمایش می‌دهند.

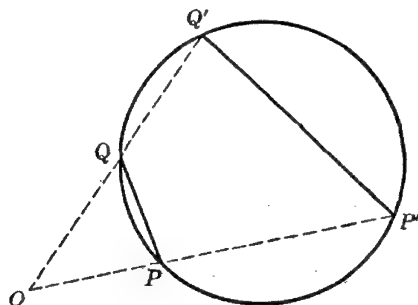
اگر نقاط P و P' در انعکاس (O, k) باهم متناظر باشند، و نقطهٔ P خم مفروض (C) را بپیماید، خم (C') که مسیر حرکت P' است، منعکس خم (C) نامیده می‌شود.

۵۱۹. قضیه. دو نقطهٔ P و Q و نقاط متناظرشان P' و Q' یا همخط‌اند یا همدایره.

در حالت دوم خطوط PQ و $P'Q'$ نسبت به بردارهای شعاع OPP' و OQQ' پادموازی‌اند.

۵۲۰. مسئله. طول بردارهای شعاع دو نقطهٔ مفروض، و طول پاره‌خطهای واصل بین این دو نقطه مفروض است. طول پاره خط واصل بین منعکسهای دو نقطه را بیابید.

فرض کنید P' و Q' نقاط متناظر دو نقطهٔ مفروض P و Q، در انعکاس (O, k) باشند (شکل ۱۲۵).



شکل۱۲۵

داریم $OP \cdot OP' = k$ و با توجه به مثلثهای متشابهٔ OPQ و $OP'Q'$، داریم

$$P'Q' : PQ = OP' : OQ = OP \cdot OP' : OP \cdot OQ = k : OP \cdot OQ$$

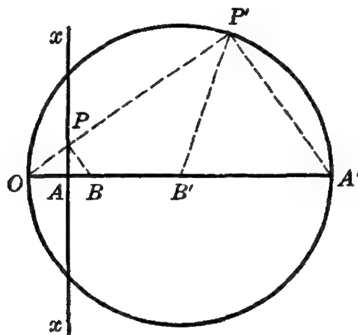
پس

$$P'Q' = PQ(k : OP \cdot OQ) \qquad \text{(f)}$$

۵۲۱. قضیه. اگر نقطه‌ای روی خط راستی که ازمرکز انعکاس نمی‌گذرد حرکت کند، منعکس آن دایره‌ای را می‌پیماید که از مرکز انعکاس می‌گذرد.

فرض کنید A پای عمودی باشد که از O بر خط مفروض x رسم می‌شود؛ فرض کنید P نقطهٔ دلخواهی از x باشد، و A' و P' منعکس A و P باشند (شکل ۱۲۶). خطوط AP و $A'P'$ نسبت به خطوط OAA' و OPP' پادموازی‌اند (§۵۱۹)؛ پس $\angle A'P'P = \angle PAO = 90^\circ$، و مکان هندسی P' دایرهٔ (OA') است که OA' قطری از آن‌است.

راه دیگر. فرض کنید B متقارن O نسبت به x، و B' منعکس B باشد (شکل ۱۲۶). چهار نقطهٔ B، B'، P، و P' همدایره‌اند، پس دو مثلث OBP و $OB'P'$ متشابه‌اند و چون OPB متساوی‌الساقین است، داریم $B'P' = B'O$؛ پس نقطهٔ متغیر P' از نقطهٔ ثابت B' فاصلهٔ ثابتی برابر $B'O$ دارد، و قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۱۲۶

۵۲۲. ملاحظه. (الف) این قضیه معمولاً به این‌صورت مختصرتر بیان می‌شود: منعکس یک خط راست، دایره‌ای است که از مرکز انعکاس می‌گذرد.

(ب) دو اثبات ارائه شده دو راه برای ترسیم دایرهٔ منعکس یک خط ارائه می‌کنند.

(ج) در شکل ۱۲۶، هر دو نقطهٔ متناظر یک طرف مرکز انعکاس O قرار دارند، که نشان می‌دهد ثابت انعکاس k مثبت و دایرهٔ انعکاس (O) حقیقی است. ولی اثباتهای ارائه شده به ازای k منفی نیز معتبرند. خواننده می‌تواند شکل مربوط به حالت دوم را خود رسم کند.

(د) اگر دایرهٔ انعکاس حقیقی باشد، خط مفروض محور اصلی این دایره و دایرهٔ منعکس این خط است. در واقع داریم (شکل ۱۲۶)

$$AO \cdot AA' = AO(AO + OA') = AO^2 + AO \cdot OA' = AO^2 - OA \cdot OA'$$

$AO \cdot AA'$ قوت A نسبت به دایرهٔ (OA')، و $AO^2 - OA \cdot OA'$ قوت A نسبت به دایرهٔ انعکاس (O) است،

زیرا $OA \cdot OA'$ با مربع شعاع (O) برابر است؛ پس گزاره بیان شده ثابت می‌شود.

(ه) داریم

$$k = OB \cdot OB' = ۲OA \cdot OB'$$

پس شعاع OB' از دایرهٔ انعکاس (OA') برابر $(k : ۲OA)$ است.

۵۲۳. قضیه عکس. اگر نقطه‌ای روی دایره‌ای که از مرکز انعکاس می‌گذرد حرکت کند، آن‌گاه نقطهٔ منعکس آن روی خط راستی حرکت می‌کند که بر خط واصل بین مرکز دایرهٔ مفروض و مرکز انعکاس عمود است.

اثبات به سادگی و با طی کردن گامهای طی شده در اثبات قضیه (۵۲۱§)، از آخر به اول، صورت می‌گیرد.

این قضیه معمولاً به این شکل مختصر بیان می‌شود: منعکس دایره‌ای که از مرکز انعکاس می‌گذرد، یک خط راست است.

۵۲۴. قضیه. یک خط راست و یک دایره را می‌توان به دو شکل مختلف منعکس هم دانست.

با توجه به دو قضیهٔ قبل (۵۲۱§, ۵۲۳§) می‌توان نتیجه گرفت که اگر یک خط و یک دایره دو شکل منعکس هم باشند، مرکز انعکاس انتهای قطری از دایره است که بر خط مفروض x عمود است. از طرف دیگر، اگر قطر مذکور را d بنامیم، و اگر انتهای O از قطر d را مرکز انعکاس و حاصل‌ضرب فاصلهٔ O از x و قطر دایره را ثابت انعکاس k در نظر بگیریم، خط x در این انعکاس به دایرهٔ (O) تبدیل می‌شود (۵۲۱§)؛ به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

اگر x بر دایره مماس باشد، روبروی قطری نقطهٔ تماس تنها مرکز انعکاس موجود است.

۵۲۵. قضیه. اگر نقطه‌ای روی دایره‌ای حرکت کند که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد، آن‌گاه نقطهٔ منعکس دایره‌ای را می‌پیماید که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد.

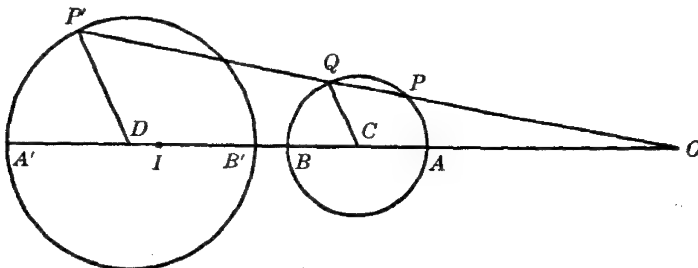
فرض کنید خط OP از مرکز انعکاس O و نقطهٔ دلخواه P از دایرهٔ مفروض (C) بگذرد و دایرهٔ (C) را در Q نیز قطع کند (شکل ۱۲۷)؛ همچنین، فرض کنید P' منعکس P در انعکاس (O, k) باشد. اگر p قوت O نسبت به (C) باشد،

$$OP \cdot OP' = k \; , \; OP \cdot OQ = p$$

پس،

$$OP' : OQ = k : p$$

پس P که تغییر می‌کند، Q نیز روی دایرهٔ (C) حرکت می‌کند، و نقطهٔ P' دایرهٔ (D) متجانس با (C)



را می‌پیماید، نقطهٔ O مرکز تجانس و $k : p$ نسبت تجانس است.

۵۲۶. ملاحظه. (الف) این قضیه گاهی به شکل مختصر زیر بیان می‌شود: منعکس یک دایره، یک دایره است.

(ب) مرکز انعکاس یک مرکز تشابه دایرهٔ مفروض و دایرهٔ منعکس آن‌است.

(ج) دو نقطهٔ منعکس P و P' دو نقطهٔ پادهمشکل در دو دایرهٔ منعکس هستند. نقطهٔ P' دایرهٔ (D) را در جهتی خلاف جهت حرکت نقطهٔ P بر روی دایرهٔ (C)، می‌پیماید.

(د) اگر R و R' شعاع دایره‌های (C) و (D) باشند، داریم (شکل ۱۲۷)

$$R' : R = OP' : OQ = OP \cdot OP' : OP \cdot OQ = k : p$$

پس،

$$R' = R(k : p)$$

(هـ) اگر ثابت انعکاس با قوت مرکز انعکاس نسبت به دایرهٔ مفروض برابر باشد، منعکس دایره، خود آن دایره خواهد بود، زیرا در این‌صورت P' بر Q منطبق است.

وقتی ثابت انعکاس مثبت، و در نتیجه دایرهٔ انعکاس حقیقی است، نتیجهٔ به دست آمده را می‌توان این‌طور بیان کرد: دایره‌ای متعامد با دایرهٔ انعکاس، بر خودش منعکس می‌شود.

۵۲۷. مشاهده. توجه به این نکته مهم است که مرکز دایرهٔ (D) (§۵۲۶) منعکس مرکز دایرهٔ مفروض (C) نیست. منعکس مرکز دایرهٔ (C)، نقطهٔ I، را می‌توان به صورت زیر به دست آورد.

فرض کنید نقطهٔ C مرکز دایرهٔ (C) باشد. A و B را دو نقطهٔ روبروی قطری (C) در نظر بگیرید که روی خط OCD هستند، و A' و B' را منعکس آنها فرض کنید (شکل ۱۲۷). با در نظر گرفتن علامت و اندازه، داریم

$$OA + OB = ۲OC \quad \text{و} \quad OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OI = k$$

با تقسیم جمله‌های تساوی اول بر این حاصل‌ضربهای برابر خواهیم داشت

$$\frac{۱}{OA'} + \frac{۱}{OB'} = \frac{۲}{OI}$$

یعنی نقطهٔ I مزدوج همساز O نسبت به A' و B' است (§۳۴۸)، یا به عبارت دیگر، مرکز یک دایره در انعکاس، روی وارون مرکز دایرهٔ منعکس شده نسبت به دایرهٔ انعکاس قرار می‌گیرد.

۵۲۸. قضیه. هر دو دایره‌ای را می‌توان به دو طریق مختلف منعکس یکدیگر دانست.

اگر دو دایره نسبت به هم منعکس باشند، مرکز انعکاس یک مرکز تشابه دو دایره است (§۵۲۶ ب)، و ثابت انعکاس با حاصل‌ضرب فاصلهٔ این مرکز تشابه از دو نقطهٔ پادهمشکل در دو دایره، نسبت به مرکز تشابه در نظر گرفته شده، برابر است (§۵۲۶).

از طرف دیگر، اگر دو دایره مفروض باشند، و اگر مرکز و ثابت انعکاس را به صورت بیان شده در بالا برگزینیم، یک دایره منعکس دایرهٔ دیگر خواهد بود (§۵۲۵). به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

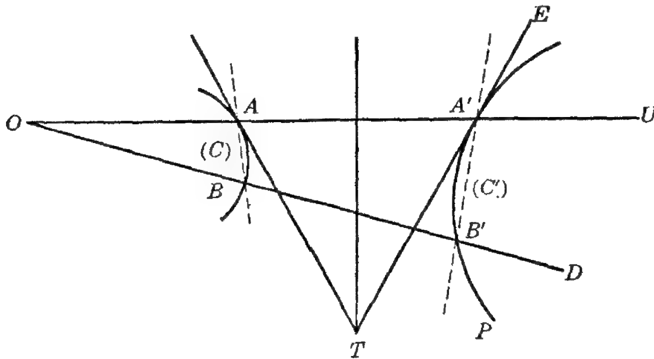
۵۲۹. چند تعریف. اگر دو خم یک نقطهٔ مشترک، مانند P، داشته باشند، زاویهٔ بین مماسهایی که در P بر دو خم رسم می‌شوند زاویهٔ برخورد دوخم خوانده می‌شود.

زاویهٔ برخورد یک خم و یک خط راست زاویهٔ بین خط راست و مماسی است که در نقطهٔ برخورد بر خم رسم می‌شود.

مثلاً زاویهٔ برخورد یک خط راست و یک دایره تنها و تنها به‌شرطی قائمه است که آن خط از مرکز دایره بگذرد.

۵۳۰. قضیه. مماسهای رسم شده بر دو شکل منعکس، در نقاط متناظر آن دو شکل، نسبت به عمودمنصف پاره‌خط واصل بین نقاط تماس، متقارن‌اند.

A، A' و B، B' را دو جفت نقطهٔ متناظر در دو خم منعکس (C) و (C') فرض کنید (شکل ۱۲۸). در چهار ضلعی محاطی $ABB'A'$ (§۵۱۹) داریم $\angle A'AB = \angle A'B'D$.



شکل۱۲۸

اگر B به A نزدیک شود، حالت حدی وتر AB، همان مماس AT است که در A بر (C) رسم می‌شود؛ در این‌صورت B' نیز به A' نزدیک می‌شود، و حالت حدی وتر $A'B'$ نیز مماس $A'T$ است که در A' بر (C') رسم می‌شود؛ حالت حدی خط OBB' نیز خط OAA' است. پس حالت حدی زاویه‌های $A'AB$ و $A'B'D$ زاویهٔ $A'AT$ و $\angle AA'T = \angle EA'U$ هستند و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

توجه کنید که گرچه $\angle TAA'$ و $\angle TA'A$ هم اندازه هستند، ولی اگر بردار شعاع OAA' را خط ابتدای زاویه در نظر بگیریم، علامت زاویه‌ها مخالف‌هم‌اند.

۵۳۱. قضیه. اگر دو خم متقاطع باشند، زاویهٔ برخوردشان با زاویهٔ برخورد دو شکل منعکس آنها در نقطهٔ متناظر برابر است.

فرض کنید AT و AR مماسهای دو خم در نقطهٔ برخورد A، و $A'T$ و $A'R$ مماسهای دو خم منعکس آنها در نقطهٔ A'، که با A متناظر است، باشند. نقاط T و R روی عمودمنصف پاره‌خط AA' قرار دارند، و $\angle TAR$ و $\angle TA'R$ از دو مثلث همنهشت TAR و $TA'R$ برابرند.

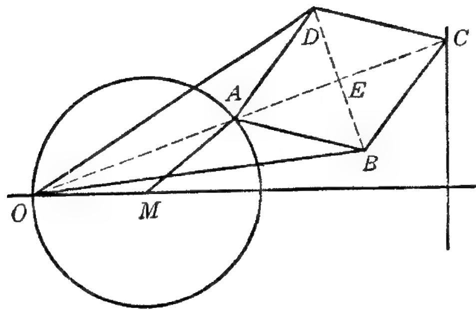
این قضیهٔ مهم غالباً به این‌صورت بیان می‌شود: زاویه‌ها در انعکاس حفظ می‌شوند.

۵۳۲. نتیجه. (الف) تعامد در انعکاس حفظ می‌شود. (ب) مماس بودن در انعکاس حفظ می‌شود.

۵۳۳. حجرهٔ پوسُلیه. فرض کنید $ABCD$ (شکل ۱۲۹) یک لوزی متشکل از چهار میلهٔ صلب هم طول لولا شده به یکدیگر باشد و فرض کنید که لولاهای B و D با دو میلهٔ صلب به نقطهٔ ثابت O لولا شده‌اند.

نقاط O، A، C، و E، یعنی نقطهٔ وسط BD، روی عمودمنصف BD قرار دارند، و داریم

$$OA \cdot OC = (OE - AE)(OE + AE) = OE^2 - AE^2$$
$$= (OD^2 - DE^2) - (AD^2 - DE^2) = OD^2 - AD^2$$



شکل۱۲۹

پس A و C منعکس هم هستند، مرکز دایرهٔ انعکاس نقطهٔ O است، و شعاع آن یک ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که وتر و ضلع قائمهٔ دیگرش دارای طولهای ثابت OD و AD هستند. پس اگر نقطهٔ A را روی یک خم حرکت دهیم، نقطهٔ C روی خم منعکس آن حرکت خواهد کرد.

در حالت خاص، اگر A با یک میلهٔ صلب به نقطهٔ ثابت M متصل باشد و $MA = MO$، نقطهٔ A روی دایره‌ای که از O می‌گذرد حرکت می‌کند؛ بنابراین نقطهٔ C روی خط راستی عمود بر MO (§۵۲۳) حرکت‌می‌کند. این مکانیسم، که حجرهٔ پوسلیه نامیده می‌شود حرکت دایره‌ای را به‌حرکت مستقیم الخط تبدیل می‌کند.

۵۳۴. مشاهده. وقتی شکل (F) در یک انعکاس به شکل (F') تبدیل می‌شود، رابطه‌های موجود در شکل (F)، به صورتی کم و بیش تغییر یافته، در شکل (F') ظاهر می‌شود. این خاصیت انعکاس به ما امکان می‌دهد بدانیم برای اینکه شکل (F') دارای ویژگی (P') باشد، شکل (F) باید کدام ویژگی (P) را داشته باشد و برعکس.

این رابطهٔ بین ویژگیهای دو شکل (F) و (F') را می‌توان به صورت زیر به کار برد. برای اینکه ثابت کنیم شکل (F) ویژگی خاصی دارد، آن‌را با انعکاسی مناسب به شکل (F') تبدیل می‌کنیم. غالباً چنین می‌شود که در شکل جدید به آسانی می‌توان یک ویژگی مشاهده کرد که ویژگی متناظرش در شکل (F) همان است که در صدد اثباتش هستیم. این تناظر دو شکل اثبات مطلوب است.

مطلب مشابهی در مورد ترسیمهای هندسی صادق است.

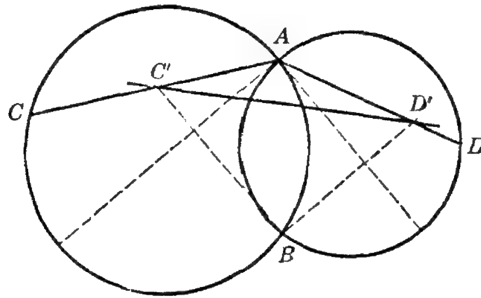
قضیهٔ زیر مثالی از کاربرد این روش است.

۵۳۵. قضیه. چهار نقطه، سه به سه چهار دایره را تعیین می‌کنند؛ اگر از این چهار دایره دو دایره متعامد باشند، آن‌گاه دو دایرهٔ دیگر نیز متعامدند.

A، B، C، و D (شکل ۱۳۰) چهار نقطهٔ مفروض‌اند. فرض کنید که دو دایرهٔ ABC و ABD متعامد باشند. در انعکاسی که (A, AB) دایرهٔ انعکاس آن‌است، نقطهٔ B به خودش، و دایره‌های ABC و ABD به دو خط راست تبدیل می‌شوند (§۵۲۳). این دو خط در B بر هم عمودند (§۵۳۲ الف) و به ترتیب از منعکسهای C و D، یعنی نقاط C' و D' می‌گذرند.

دایرهٔ CDA به خط $C'D'$ (§۵۲۳) و دایرهٔ CDB به دایرهٔ $C'D'B$ (§۵۲۵) تبدیل می‌شود. چون $\angle C'BD'$ قائمه است، خط $C'D'$ قطری از دایرهٔ $C'D'B$ است و بنابراین، بر دایره عمود است. پس می‌توان نتیجه گرفت که دایره‌های (CDA) و (CDB) متعامدند (§۵۳۲ الف) و قضیه ثابت می‌شود.

روش دیگر. در انعکاس (C, p)، که در آن p قوت نقطهٔ C نسبت به دایرهٔ ABD است، دایرهٔ ABD به خودش تبدیل می‌شود (§۵۲۶ هـ)، و خطوط CA، CB، و CD این دایره را در A'، B'، و D' (منعکسهای



شکل ۱۳۰

نقاط A، B، و D) نیز قطع می‌کنند. دایرهٔ CAB به خط راست $A'B'$ تبدیل می‌شود، و این خط یک قطر دایرهٔ ABD است، زیرا دایره‌های ABC و ABD بنابر فرض برهم عمودند.

دایره‌های CDA و CDB به‌خطوط $D'A'$ و $D'B'$ تبدیل می‌شوند. این دو خط برهم عمودند؛ پس دایره‌های CDA و CDB نیز برهم عمودند.

۵۳۶. قضیهٔ بطلمیوس و بسط آن. در هر چهارضلعی مجموع حاصل‌ضربهای دو ضلع روبروی هم، بسته به محاطی نبودن یا بودن چهارضلعی، بزرگتر یا برابر حاصل‌ضرب قطرهاست.

فرض کنید $OABC$ چهارضلعی مفروض (شکل ۱۳۱) و A'، B'، C' نقاط منعکس A، B، C در انعکاس (O,k) باشند. داریم (§۵۲۰)

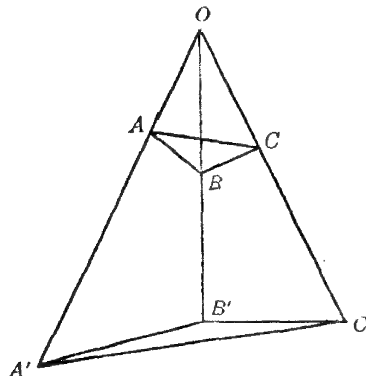
$$\frac{AB}{OA\cdot OB}=\frac{A'B'}{k},\quad \frac{BC}{OB\cdot OC}=\frac{B'C'}{k},\quad \frac{AC}{OA\cdot OC}=\frac{A'C'}{k}$$

حال اگر $OABC$ محاطی نباشد، نقاط A'، B'، C' همخط نیستند (§۵۲۵)؛ پس،

$$A'B'+B'C'>A'C' \tag{۱}$$

پس،

$$\frac{AB}{OA\cdot OB}+\frac{BC}{OB\cdot OC}>\frac{AC}{OA\cdot OC} \tag{۲}$$



شکل ۱۳۱

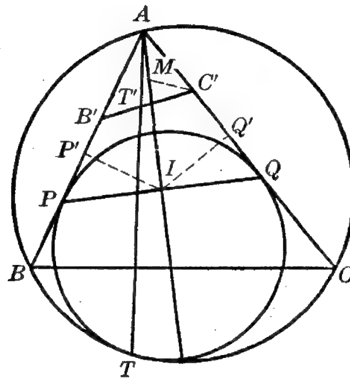
یا

$$AB \cdot OC + BC \cdot OA > AC \cdot OB \qquad (۳)$$

ولی اگر $OABC$ محاطی باشد، نقاط A'، B'، C' همخط‌اند (§۵۲۳)؛ پس در (۱)، (۲)، و (۳) علامت $>$ باید با علامت تساوی $(=)$ عوض شود.

۵۳۷. قضیه. اگر دایره‌ای بر دو ضلع یک مثلث و بر دایرهٔ محیطی آن مماس داخلی (یا خارجی) باشد، خطی که از نقاط تماس آن با اضلاع می‌گذرد، از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی (یا دایرهٔ محاطی خارجی متناظر) نیز می‌گذرد.

فرض کنید دایرهٔ PQT در نقطهٔ T بر دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC مماس داخلی باشد (شکل ۱۳۲) و در نقاط P و Q بر اضلاع AB و AC مماس باشد. فرض کنید I نقطهٔ وسط PQ باشد. اگر B' و C' منعکسهای B و C، در انعکاس (A, AI^2) باشند، خط $B'C'$ منعکس (O) است و خط AT خط $B'C'$ را در T' منعکس T، قطع می‌کند.



شکل ۱۳۲

فرض کنید P' و Q' منعکسهای P و Q باشند، داریم $AP \cdot AP' = AI^2$. و چون مثلث AIP در رأس I قائمه است، نقطهٔ P' پای عمودی است که از I بر وتر AP رسم می‌شود. مطلب مشابهی در مورد Q' صادق است. حال چون دایرهٔ $P'Q'T'$ منعکس دایرهٔ PQT است، و در نتیجه در T' بر $B'C'$ مماس است (§۵۳۲ ب)، I مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث $AB'C'$ نسبت به A است.

دایرهٔ $IB'C'$ خط IA را در M، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $AB'C'$، قطع می‌کند (§۱۲۲ الف)، و در چهار ضلعی محاطی $IB'MC'$ داریم

$$\angle B'IM = \angle B'C'M = \tfrac{۱}{۲}\angle B'C'A = \tfrac{۱}{۲}\angle ABC$$

زیرا خطوط BC و $B'C'$ نسبت به AB و AC پاد موازی‌اند. خطوط BI و $B'I$ نیز نسبت به AB و AI پادموازی‌اند، زیرا نقاط B' و I منعکسهای B و I هستند؛ پس،

$$\angle ABI = \angle B'IA = \angle B'IM = \tfrac{۱}{۲}\angle ABC$$

و I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ABC است.

اثبات در حالت مماس خارجی نیز مشابه همین اثبات است.

۵۳۸. مسئله. انعکاسی بیابید که سه دایرهٔ مفروض را به خودشان منعکس کند.

قوت مرکز انعکاس مطلوب S، نسبت به هریک از دایره‌های مفروض باید برابر ثابت انعکاس k باشد (§۵۲۶ هـ)؛ پس سه قوت باید برابر باشند، یعنی S باید مرکز اصلی سه دایرهٔ مفروض باشد. همچنین ثابت انعکاس باید با قوت S نسبت به دایره‌های مفروض برابر باشد. مسئله یک و تنها یک جواب دارد (§۴۹۳).

اگر مراکز سه دایرهٔ مفروض همخط باشند، بسته به‌اینکه دایره‌ها هم‌محور باشند یا نباشند، مسئله یا بی‌نهایت جواب دارد یا جواب ندارد.

۵۳۹. مسئله. انعکاسی بیابید که سه دایرهٔ مفروض با مراکز ناهمخط را به سه دایره که مراکزشان روی خط مفروضی باشند تبدیل کند.

سه دایرهٔ منعکس بر خط مفروض s عمودند، پس s منعکس دایره‌ای است که از مرکز انعکاس مطلوب می‌گذرد و بر سه دایرهٔ مفروض عمود است، یعنی O نقطه‌ای روی دایرهٔ متعامد (R) برای سه دایرهٔ مفروض است. پس اگر (R) حقیقی باشد، O یکی از دو انتهای قطر عمود بر s در دایرهٔ (R) است.

۵۴۰. قضیه. ثابت کنید که یک دسته دایرهٔ هم‌محور به یک دسته دایرهٔ هم‌محور منعکس می‌شود.

فرض کنید (P) و (Q) دو دایرهٔ دلخواه از دسته دایرهٔ هم‌محور (E) باشند، که مزدوج دسته دایرهٔ هم‌محور مفروض (F) است. فرض کنید هر دایرهٔ (C) از دسته دایرهٔ (F) به دایرهٔ (C')، که بر منعکسهای (P) و (Q) [یعنی (P') و (Q')] عمود است، تبدیل شود (§۵۳۲ الف)؛ پس (C') دسته دایرهٔ هم‌محور (F') را تعیین می‌کند (§۴۵۵).

۵۴۱. بحث. یکی از دو دسته دایرهٔ هم‌محور مزدوج مفروض (E) و (F)، مثلاً (F)، دو نقطهٔ اساسی A و B دارد که نقاط حدی دستهٔ دایرهٔ دیگر (E) هستند. دایره‌های منعکس (F)، یعنی دایره‌های (F') از منعکسهای A و B، یعنی A' و B' می‌گذرند.

دایره‌های (E) به دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور (E')، تبدیل می‌شوند که مزدوج (F') است؛ پس نقاط A' و B' نقاط حدی (E') هستند.

اگر یکی از نقاط A و B، مثلاً A، را مرکز انعکاس بگیریم. دایره‌های (F) به خطهای راستی تبدیل می‌شوند که از B'، منعکس B، می‌گذرند؛ هر دایرهٔ (E') بر خطوطی که از B' می‌گذرند عمود است، یعنی B' مرکز مشترک همهٔ دایره‌های (E') است.

۵۴۲. نتیجه. در انعکاس، دو نقطهٔ وارون نسبت به یک دایرهٔ مفروض، به دو نقطهٔ وارون نسبت به دایرهٔ منعکس دایرهٔ مفروض، تبدیل می‌شوند.

نقاط حدی A و B (§۵۴۱) نسبت به هر دایره‌ای از (E)، مثلاً (M)، وارون یکدیگرند، و نقاط A' و B' نسبت به (M')، منعکس (M)، وارون یکدیگرند.

۵۴۳. قضیه. دو دایرهٔ منعکس و دایرهٔ انعکاس هم‌محورند.

فرض کنید (C) و (C') دو دایرهٔ منعکس باشند و فرض کنید (S) دایرهٔ انعکاس باشد.

اگر (S) و (C) دو نقطهٔ مشترک داشته باشند، دایرهٔ (C') از این دو نقطه می‌گذرد، زیرا نقاط (S) روی خودشان منعکس می‌شوند.

اگر (S) و (C) نقطهٔ مشترک نداشته باشند، یک دسته دایرهٔ هم‌محور نامتقاطع را تعیین می‌کنند که دو نقطهٔ حدی L و L' دارد. این نقاط که نسبت به (S) وارون یکدیگرند، به یکدیگر منعکس می‌شوند و چون نسبت به (C) وارون یکدیگر هستند، نسبت به (C') وارون یکدیگرند (§۵۴۲)؛ پس (S)، (C) و (C') به یک دسته دایرهٔ هم‌محور متعلق‌اند (§۴۴۸ ب).

۵۴۴. نتیجه. اگر دو دایره نسبت به یک دایرهٔ دیگر، به‌عنوان دایرهٔ انعکاس، منعکس هم باشند، آن‌گاه این دایره، دایرهٔ تشابه آن دو دایره است.

مرکز دایرهٔ سوم (S) مرکز تشابه دو دایرهٔ (C) و (C') است (§۵۲۶ ب)، و (S) با (C) و (C')، هم‌محور است بنابراین گزارهٔ بیان شده درست است.

۵۴۵. قضیه. در هر مثلث، دایرهٔ محیطی، دایرهٔ نه نقطه، دایرهٔ قطبی و دایرهٔ محیطی مثلث مماسی هم‌محورند.

رأس A و پای ارتفاع AD از مثلث ABC نسبت به دایره قطبی (H) از مثلث ABC وارون یکدیگرند؛ گزاره‌های مشابهی برای دو نقطهٔ B و E و همچنین، برای دو نقطهٔ C و F برقرارند. پس دایرهٔ محیطی $ABC = (O)$ و دایرهٔ نه نقطهٔ $DEF = (N)$ نسبت به (H) منعکس یکدیگرند؛ پس (O)، (N) و (H) هم‌محورند (§۵۴۳).

نقطهٔ برخورد مماسهایی که از B و C بر (O) رسم می‌شوند، قطب BC نسبت به (O) است؛ پس اگر این نقطهٔ برخورد را L بنامیم، L و نقطهٔ وسط BC، A'، نسبت به (O) وارون یکدیگرند. گزاره‌های مشابهی نیز برای دو نقطهٔ M و B' و همچنین دو نقطهٔ N و C' برقرارند. پس دایرهٔ محیطی $LMN = (T)$ از مثلث مماسی و $A'B'C' = (N)$ نسبت به (O) منعکس یکدیگرند و در نتیجه، (O)، (T) و (N) هم‌محورند.

در نتیجه چهار دایرهٔ (O)، (N)، (H)، و (T) هم‌محورند (§۴۴۱).

۵۴۶. نتیجه. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مماسی روی خط اویلر مثلث مفروض قرار دارد (§۴۴۳).

تمرین

۱) نشان دهید مماسهایی که از مرکز انعکاس بر یک خم رسم می‌شوند، بر خم منعکس نیز مماس‌اند.

۲) اگر دو دایره نسبت به مرکز دلخواهی منعکس شوند، خط‌المرکزین آنها به چه شکلی منعکس می‌شود؟

۳) نشان دهید اگر نقاط P و Q با مرکز انعکاس همخط باشند (§۵۲۰) باز رابطهٔ (f) صادق است.

۴) نشان دهید که منعکس یک گسترهٔ همساز، نسبت به نقطه‌ای روی خط گستره، یک گسترهٔ همساز است.

۵) سه نقطهٔ ناهمخط P، A، B و نقطهٔ متغیر M، همخط با A و B مفروض‌اند. ثابت کنید زاویهٔ برخورد دو دایرهٔ PAM و PBM ثابت است.

۶) مماس LM که از نقطهٔ متغیر M روی دایرهٔ مفروض (O) بر این دایره رسم می‌شود، خط s را در L قطع می‌کند. نشان دهید که مکان هندسی تصویر M بر OL یک دایره است.

۷) دایرهٔ (O)، دو نقطهٔ ثابت A و B، و خط متغیری که از B می‌گذرد مفروض‌اند. این خط متغیر دایرهٔ (O) را در C و D قطع می‌کند و خطوط AC و AD دایرهٔ (O) را در E و F نیز قطع می‌کنند. نشان دهید که مرکز دایرهٔ AEF یک خط راست را می‌پیماید.

۸) خطوطی که از A و B، دو انتهای قطر AB از دایرهٔ مفروض (O)، به نقطهٔ ثابت P وصل می‌شوند، (O) را در A' و B' نیز قطع می‌کنند، نشان دهید که دایرهٔ $PA'B'$ بر (O) عمود است.

۹) دو دایرهٔ مفروض (A) و (B) در نقاط E و F باهم برخورد می‌کنند. خطوط MEE' و MFF' که از E و F و نقطهٔ دلخواه M برروی دایرهٔ (B) می‌گذرند، (A) را در E' و F' قطع می‌کنند. ثابت کنید که وتر $E'F'$ بر MB عمود است.

۱۰) دو وتر متعامد BC و DE از یک دایرهٔ مفروض، درون دایره، در نقطهٔ A، یکدیگر را قطع می‌کنند. نشان دهید ارتفاعی که از رأس A در مثلث ABD رسم می‌شود یک میانهٔ مثلث ACE است.

۱۱) نقاط A'، B'، و C' روی ارتفاعهای AH، BH و CH از مثلث ABC مشخص شده‌اند، به‌طوری‌که با در نظرگرفتن اندازه و علامت، داریم

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$$

نشان دهید که H یک مرکز سه‌مماس مثلث $A'B'C'$ است.

۱۲) مماس متغیری بر دایره‌ای به مرکز A، دایرهٔ دیگری به‌مرکز B، را در نقاط C و D قطع می‌کند. ثابت کنید که دایرهٔ BCD بر یک دایرهٔ ثابت مماس است. راهنمایی. انعکاس (B, BC^2) را در نظر بگیرید.

۱۳) زاویهٔ BAC با اندازهٔ ثابت حول رأس ثابت A دوران می‌کند و خط ثابت s را در B و C قطع می‌کند. نشان دهید که دایرهٔ ABC بر یک دایرهٔ ثابت مماس است.

۱۴) نشان دهید که حاصل‌ضرب قوتهای یک مرکز تشابه دو دایره نسبت به‌آن دو دایره، با توان چهارم شعاع دایرهٔ پاد متشابه آن دو دایره برابر است.

۱۵) اگر دایرهٔ (B) از مرکز دایرهٔ (A) بگذرد، نشان دهید که محور اصلی (A) و (B)، منعکس (B)، در انعکاس با دایرهٔ انعکاس (A) است.

۱۶) نشان دهید دایرهٔ تشابه و محور اصلی دو دایره نسبت به دایرهٔ پاد متشابه آن دو دایره، منعکس یکدیگرند.

۱۷) دو دایرهٔ متعامد و دو قطر عمود برهم آنها را در نظر بگیرید. نشان دهید از چهار خطی که سرهای این دو قطر را به یکدیگر وصل می‌کنند، دوتا از یک نقطهٔ برخورد دو دایره و دوتا از نقطهٔ برخورد دیگر دو دایره می‌گذرند.

۱۸) (الف) ثابت کنید که منعکس دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC نسبت به دایرهٔ محاطی داخلی (I)، به‌عنوان دایرهٔ انعکاس، دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث XYZ است. X، Y و Z نقاط تماس دایرهٔ (I) با اضلاع مثلث ABC هستند. (ب) با استفاده از انعکاس رابطهٔ اویلر، $d^2 = R^2 - 2Rr$، را ثابت کنید؛ (ج) عبارتهای مشابه مربوط به دایره‌های محاطی خارجی را بیان و آنها را با استفاده از انعکاس ثابت کنید.

۱۹) چهار نقطه در یک صفحه مفروض‌اند؛ منعکس هر دستهٔ سه‌تایی را نسبت به نقطهٔ چهارم می‌یابیم، نشان دهید که چهار مثلث منعکس حاصل متشابه‌اند.

۲۰) دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد، و دایرهٔ مفروضی را با زاویه‌ای معین قطع کند.

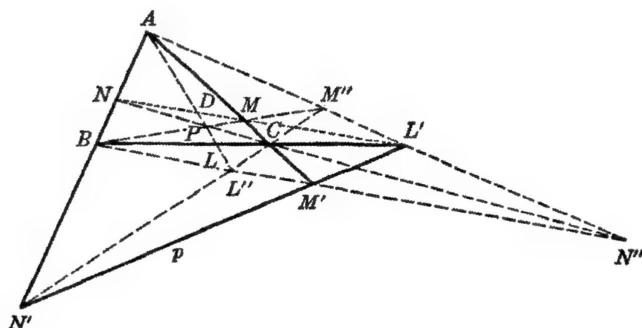
۲۱) انعکاس این قضیه را بیان کنید: ارتفاعهای یک مثلث همرس‌اند. راهنمایی. مرکز ارتفاعی را به‌عنوان مرکز انعکاس برگزینید.

۱۰

هندسهٔ نوین مثلث

الف. قطب و خط قطبی نسبت به یک مثلث

۵۴۷. روابط همساز. (الف) فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد (شکل ۱۳۳)، و L، M، و N نقاط برخورد خطوط AP، BP و CP با اضلاع BC، CA، و AB؛ و L'، M'، و N' مزدوجهای همساز L، M و N نسبت به جفت رأسهای متناظر مثلث ABC باشند.



شکل ۱۳۳

قضیه. نقاط L'، M' و N' همخط‌اند.

(ب) فرض کنید p خطی در صفحهٔ مثلث ABC باشد که امتداد اضلاع BC، CA، و AB را در نقاط L'، M' و N' قطع کند، و L، M، N مزدوجهای همساز L'، M' و N' نسبت به جفت رأسهای متناظر ABC باشند.

قضیه. خطوط AL، BM و CN همرس‌اند.

در هر دو مورد (الف) و (ب)، بنابر مطالب گفته شده در ترسیم، با در نظرگرفتن اندازه و علامت، داریم

$$\frac{BL'}{L'C}=-\frac{BL}{LC}\ ,\quad \frac{CM'}{M'A}=-\frac{CM}{MA}\ ,\quad \frac{AN'}{N'B}=-\frac{AN}{NB}$$

پس با ضرب کردن این برابریها به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{BL'\cdot CM'\cdot AN'}{L'C\cdot M'A\cdot N'B}=\frac{BL\cdot CM\cdot AN}{LC\cdot MA\cdot NB} \qquad \text{(F)}$$

در حالت (الف)، سمت راست رابطهٔ (F)، بنابر قضیهٔ سِوا، برابر واحد است و از تساوی حاصل، بنابر قضیهٔ منلائوس، نتیجه می‌شود که نقاط L'، M' و N' همخط‌اند.

در مورد (ب)، بنابر قضیهٔ منلائوس، سمت چپ رابطهٔ (F) برابر واحد است و از تساوی حاصل، بنابر قضیهٔ سوا، نتیجه می‌شود که خطوط AL، BM و CN همرس‌اند.

۵۴۸. چند تعریف. خط $p=L'M'N'$ (§۵۴۷) را قطبی سه‌خطی یا خط همساز نقطهٔ P برای مثلث ABC، و P را قطب سه‌خطی یا قطب همساز خط p برای مثلث ABC می‌نامند.

۵۴۹. قضیه. قطبی سه خطی یک نقطه برای یک مثلث محور منظری آن مثلث، و مثلث سِوایی نقطهٔ مفروض برای مثلث مفروض است، و برعکس.

داریم (شکل ۱۳۳)

$$(ABNN')=-۱\,,\qquad (ACMM')=-۱$$

و دو گسترهٔ همساز در نقطهٔ A مشترک‌اند، پس (§۳۵۷) خطوط BC، MN و $M'N'$ همرس‌اند، یعنی نقطهٔ L' با M و N همخط است. به‌طور مشابه، M' با L و N، و N' با L و M همخط است، و قضیه ثابت می‌شود.

۵۵۰. ملاحظه. مثلث ABC و نقطهٔ P مفروض‌اند. قضیهٔ فوق (§۵۴۹) راه ساده‌ای برای ترسیم قطبی سه خطی P برای ABC، یعنی خط p، تنها با استفاده از خط‌کش به‌دست می‌دهد.

۵۵۱. قضیه. قطبی سه خطی یک نقطه برای یک مثلث، قطبی سه‌خطی مثلث سِوایی این نقطه نسبت به مثلث مفروض نیز هست.

داریم $A(BCLL')=-۱$ (شکل ۱۳۳)؛ پس نقطهٔ L' مزدوج همساز D، نقطهٔ برخورد APL و $L'MN$، نسبت به M و N است (§۳۵۳). پس L' نقطه‌ای از قطبی سه خطی P برای مثلث LMN است. برای M' و N' نیز چنین است، پس قضیه ثابت می‌شود.

۵۵۲. تعریف. رأسهای $L''=(BM',CN')$، $M''=(CN',AL')$، $N''=(AL',BM')$ از مثلثی را که از خطوط AL'، BM' و CN' تشکیل می‌شود (§۵۴۷) وابسته‌های همساز P برای مثلث ABC می‌نامند.

۵۵۳. قضیه. وابسته‌های همساز نقطهٔ P (§۵۵۲) روی خطوط AP، BP و CP قرار دارند، و به‌ترتیب با نقاط A و L، B و M، C و N به‌طور همساز از نقطهٔ P تقسیم می‌شوند.

با توجه به دو دسته خط همساز (شکل ۱۳۳)

$$B(ACMM')=-۱\,,\qquad C(ABNN')=-۱$$

که توسط خط APL قطع می‌شوند، نتیجه می‌شود که BM' و CN' از مزدوجهای همساز P نسبت به A و L می‌گذرند؛ پس این مزدوج همساز نقطهٔ L'' بین دو خط BM' و CN' مشترک است. در مورد M'' و N'' نیز گزاره‌های مشابهی برقرارند.

۵۵۴. نتیجه. وابسته‌های همساز نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC رأسهای یک مثلث منظری نسبت به ABC هستند؛ نقطهٔ P مرکز منظری، و قطبی سه خطی P برای ABC محور منظری است.

۵۵۵. ملاحظه. اگر مثلث ABC و خط $p = L'M'N'$ مفروض باشند، خطوط AL'، BM' و CN' نقاط L''، M'' و N'' را تعیین می‌کنند و خطوط AL''، BM'' و CN'' یکدیگر را در قطب همساز خط p برای مثلث ABC، یعنی نقطهٔ P، قطع می‌کنند.

۵۵۶. قضیه. نقطهٔ P و سه وابستهٔ همساز آن نسبت به یک مثلث ABC چهار نقطه هستند، که هر سه‌تایی از آنها مثلثی محیط بر ABC و منظری نسبت به آن‌را تشکیل می‌دهند، و نقطهٔ چهارم مرکز منظری است.

محورهای منظری خطوط $L'MN$، $LM'N$ و LMN' هستند.

اثبات به‌آسانی با توجه به شکل ۱۳۳ به‌دست می‌آید.

۵۵۷. ملاحظه. شکل ۱۳۳ با مفروض بودن ABC و نقطهٔ P رسم شده است. ولی اگر به‌جای P یکی از وابسته‌های همساز آن نسبت به ABC، مثلاً L'' را نیز داشته باشیم باز هم می‌توانیم همین شکل را به‌دست آوریم، زیرا مزدوج همساز L'' نسبت به A و L نقطهٔ P است و بقیهٔ شکل به‌همان صورت قبل رسم می‌شود.

تمرین

۱) نشان دهید که محور ارتفاعی یک مثلث، قطبی سه خطی مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به آن مثلث و نسبت به مثلث ارتفاعی آن است؛ و رأسهای مثلث مفروض وابسته‌های همساز مرکز ارتفاعی نسبت به مثلث ارتفاعی هستند.

۲) نشان دهید که قطبی سه‌خطی مرکز دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث از پای نیمسازهای خارجی می‌گذرد، و بر خط واصل بین مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی عمود است؛ همچنین نشان دهید که مراکز دایره‌های محاطی خارجی وابسته‌های همساز مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هستند.

۳) وابسته‌های همساز مرکز ثقل مثلث را رسم کنید. آیا مرکز ثقل قطبی سه خطی دارد؟

۴) L، M، و N نقاط برخورد خطوط AP، BP و CP با اضلاع BC، CA و AB از مثلث ABC، و L'، M'، N' نقاط برخورد همین اضلاع با قطبی سه خطی P برای ABC هستند. نشان دهید که نقاط وسط LL'، MM' و NN' همخط‌اند.

۵) اگر A' نقطهٔ برخورد ضلع BC از مثلث ABC با قطبی سه‌خطی نقطهٔ P واقع بر دایرهٔ محیطی ABC باشد، نشان دهید که دایرهٔ APA' از نقطهٔ وسط ضلع BC می‌گذرد.

۶) نشان دهید می‌توان سه دایره رسم کرد که مراکزشان رأسهای یک مثلث مفروض باشند، به‌طوری‌که پاهای سه خط سوایی مفروض، مراکز تشابه دوبه‌دوی آن سه دایره باشند.

۷) فرض کنید L، M و N پای سه خط سوایی AP، BP و CP از مثلث ABC باشند، و P' نقطه‌ای از قطبی سه‌خطی P برای ABC باشد. اگر خطوط AP'، BP' و CP' خطوط MN، NL و LM را در X، Y و Z قطع کنند، نشان دهید که مثلث XYZ بر مثلث ABC محیط است.

ب. هندسهٔ لوموان

I. میانه‌های متقارن

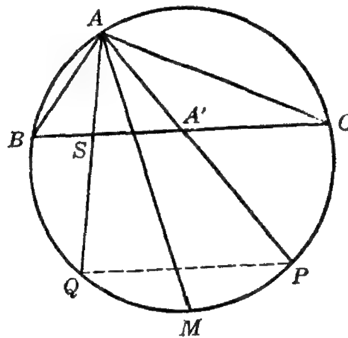
۵۵۸. تعریف. متقارن هر میانهٔ یک مثلث نسبت به نیمساز داخلی رسم شده از همان رأس، میانهٔ متقارن خوانده می‌شود.

هر مثلث سه میانهٔ متقارن دارد.

توجه کنید که هر میانه و میانهٔ متقارن متناظر با آن، نسبت به نیمساز خارجی رسم شده از همان رأس نیز متقارن‌اند.

۵۵۹. قضیه. نقاط برخورد یک میانه و میانهٔ متقارن متناظرش با دایرهٔ محیطی مثلث، خطی موازی با ضلع روبروی رأس در نظر گرفته شده را تعیین می‌کنند.

وسط کمان PQ (شکل ۱۳۴) که توسط میانهٔ AP و میانهٔ متقارن AQ روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC جدا می‌شود، بر وسط کمان BC از این دایره منطبق است؛ پس دو وتر BC و QP موازی‌اند.



شکل ۱۳۴

این گزاره راه ساده‌ای برای رسم میانه‌های متقارن یک مثلث در اختیارمان می‌گذارد.

۵۶۰. قضیه. میانهٔ متقارنی که از یک رأس مثلثی رسم می‌شود، از نقطهٔ برخورد مماسهایی که در دو رأس دیگر مثلث بر دایرهٔ محیطی رسم می‌شوند می‌گذرد.

نقطهٔ برخورد مماسهای DB و DC بر دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC در نقاط B و C را D می‌نامیم؛ D قطب BC برای (O) است؛ پس قطر II' از دایرهٔ (O) (شکل ۱۳۵) که از D می‌گذرد، عمودمنصف BC است. پس $(DA'II') = -1$، و بنابراین، $A(DA'II') = -1$.

زاویهٔ IAI' قائمه است؛ پس AI و AI' نیمسازهای $\angle DAA'$ هستند (§۳۵۵). ولی AI نیمساز داخلی زاویهٔ A است و AA' میانهٔ ABC است؛ پس AD بنابر تعریف، میانهٔ متقارن رسم شده از رأس A در مثلث ABC است.

۵۶۱. قضیه. هر میانهٔ متقارن ضلع روبرویش را به دو پاره‌خط تقسیم می‌کند به‌طوری‌که طول این پاره‌خطها با مربع اضلاع مجاور مثلث متناسب‌اند.

خط قطبی نقطهٔ D (شکل ۱۳۵)، یعنی خط BC، مماس AT_a را که در نقطهٔ A بر دایرهٔ محیطی (O) رسم شده است، در قطب میانهٔ متقارن AD، یعنی T_a قطع می‌کند؛ اگر نقطهٔ برخورد BC و AD نقطهٔ S باشد، پاره‌خط ST_a توسط نقاط B و C از دایرهٔ (O) به‌طور همساز تقسیم می‌شوند. چون T_a پاره‌خط BC را به‌طور خارجی به نسبت $AB^2 : AC^2$ تقسیم می‌کند (§۳۱۹) قضیه ثابت می‌شود.

۵۶۲. ملاحظه. ضمناً صحبت کردیم که هر میانهٔ متقارن مثلث مزدوج همساز خط مماس بر دایرهٔ محیطی در رأس متناظر، نسبت به دو ضلعی است که از آن رأس می‌گذرند.

۵۶۳. تعریف. مماسهایی را که در رأسهای مثلث بر دایرهٔ محیطی مثلث رسم می‌شوند گاهی میانه‌های متقارن خارجی مثلث می‌نامند.

۵۶۴. قضیه. (الف) هر میانهٔ متقارن از وسط پاره‌خط پاد موازی ضلعی که به آن وارد می‌شود می‌گذرد.

در واقع پاد موازی BC نسبت به AB و AC (شکل ۱۳۵) با مماس AT_a موازی است (§۱۸۵، §۱۹۱)؛ بنابراین قضیه ثابت می‌شود (§۳۵۱).

شکل۱۳۵

(ب) برعکس، اگر پاره‌خطی بین دو ضلع یک مثلث، توسط میانهٔ متقارن متناظر نصف شود، آن پاره‌خط نسبت به آن دو ضلع، پاد موازی ضلع سوم مثلث است.

مسئله ۴۱§ تنها یک جواب دارد، پس قضیه ثابت می‌شود.

۵۶۵. قضیه. فاصلهٔ هر نقطهٔ روی میانهٔ متقارن از دو ضلع مجاور، با طول این دو ضلع متناسب است.

فرض کنید x و y فاصلهٔ پای میانهٔ متقارن AS (شکل ۱۳۶) از اضلاع AC و AB از مثلث ABC باشند. چون مثلثهای ASC و ASB یک ارتفاع مشترک دارند که از A می‌گذرد، داریم

$$bx : cy = ASC\ \text{مساحت} : ASB\ \text{مساحت} = SC : SB = b^۲ : c^۲ \qquad (§۵۶۱)$$

پس،

$$x : y = b : c$$

چون فاصلهٔ هر نقطهٔ AS از AC و AB با x و y متناسب است، قضیه ثابت می‌شود.

شکل۱۳۶

۵۶۶. ملاحظه. قضیهٔ بالا (§۵۶۵) برای میانهٔ متقارن خارجی مثلث نیز صادق است. اثبات مشابه اثبات بالاست.

۵۶۷. قضیه. اگر فاصله‌های یک نقطه از دو ضلع یک مثلث با این اضلاع متناسب باشند، آن نقطه روی میانهٔ متقارن وارد بر ضلع سوم قرار دارد.

فرض می‌کنیم که نقطه داخل زاویهٔ بین دو ضلع در نظر گرفته شده قرار داشته باشد.

اگر M نقطه‌ای باشد که فاصله‌هایش از b و c با b و c متناسب باشد، و S نقطهٔ برخورد AM و BC باشد (شکل ۱۳۶)، فاصله‌های S تا b و c نیز با b و c متناسب‌اند. پس S پاره‌خط BC را به دو پاره‌خط تقسیم می‌کند که بنابر آنچه در اثبات قضیهٔ قبل گفته شد (§۵۶۵)، نسبتشان $b^2 : c^2$ است. چون تنها یک نقطه وجود دارد که BC را به‌طور داخلی به‌این نسبت تقسیم می‌کند، قضیه ثابت می‌شود.

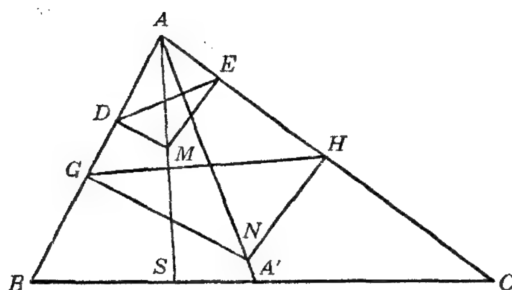
۵۶۸. قضیه. اگر از یک نقطهٔ میانهٔ متقارن (یا میانه) عمودهایی بر اضلاع مجاور رسم شود، خطی که پای این عمودها را به‌هم وصل می‌کند بر میانهٔ (یا میانهٔ متقارن) متناظر عمود است.

فرض کنید که در مثلث ABC، AA' و AS میانه و میانهٔ متقارن رسم شده از رأس A باشند (شکل ۱۳۷). اگر MD و ME عمودهایی باشند که از M، واقع بر AS، بر اضلاع AB و AC رسم شده‌اند، چهارضلعی $ADME$ محاطی است، پس،

$$\angle DEM = \angle DAM = \angle EAA'$$

ME بر AE عمود است؛ پس ED بر AA' عمود است.

به‌طور مشابه، می‌توان نشان داد که GH بر AS عمود است.



شکل ۱۳۷

۵۶۹. قضیه. اگر دو پادموازی دو ضلع یک مثلث طولهایی برابر داشته باشند، یکدیگر را روی میانهٔ متقارن وارد بر ضلع سوم قطع می‌کنند.

فرض کنید DE و FH (شکل ۱۳۸) به‌ترتیب با اضلاع AC و AB از مثلث ABC پادموازی باشند و M نقطهٔ برخورد آنها باشد. داریم

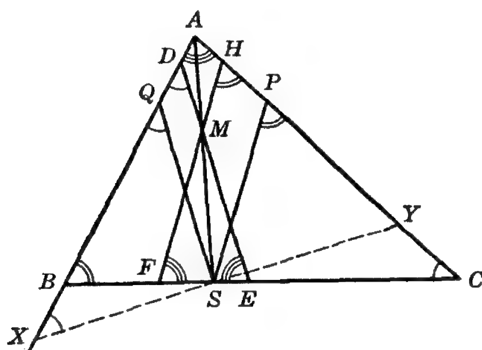
$$\angle HFC = \angle DEB = \angle A$$

پس مثلث FME متساوی‌الساقین است، و

$$ED = FH, FM = EM$$

پس

$$DM = HM$$



شکل۱۳۸

فرض کنید S نقطهٔ برخورد AM و BC باشد و SQ و SP خطوطی باشند که از S به‌موازات DE و FH رسم شده‌اند. با توجه به مثلثهای متشابه، داریم

$$SQ : MD = AS : AM = SP : MH$$

و چون $MD = MH$، داریم $SQ = SP$.

مثلثهای BSQ و CSP هردو با مثلث ABC متشابه‌اند؛ پس،

$$BS : SQ = c : b\,, \qquad SP : SC = c : b$$

با ضرب کردن این روابط در یکدیگر، به‌دست می‌آوریم

$$BS : SC = c^{2} : b^{2}$$

چون $SQ = SP$. پس S پای میانهٔ متقارن است (۵۶۱§) .

۵۷۰. قضیهٔ عکس. میانهٔ متقارن وارد بر یک ضلع مثلث، مکان هندسی نقاطی است که می‌توان از آنها پادموازیهای هم‌طولی برای دو ضلع دیگر مثلث رسم کرد.

۵۷۱. نتیجه. میانهٔ متقارن وارد بر هر ضلع مثلث، مکان هندسی نقاطی است که می‌توان از آنها پادموازیهایی با طولهای مساوی برای دو ضلع دیگر مثلث رسم کرد.

تمرین

۱) روی ضلع AB از مثلث ABC، AB' را برابر AC، و روی ضلع AC از این مثلث، AC' را برابر AB جدا می‌کنیم. نشان دهید که نقطهٔ وسط $B'C'$ روی میانهٔ متقارن گذرنده از رأس A در مثلث ABC قرار دارد.

۲) دو مربع رسم کرده‌ایم که اضلاع AB و AC از مثلث ABC به‌ترتیب، یک ضلع هرکدام هستند و هر دو مربع خارج مثلث ABC قرار دارند، نشان دهید که اضلاع روبروی AB و AC در این دو مربع یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که روی میانهٔ متقارن گذرنده از رأس A در مثلث ABC قرار دارد.

۳) از مثلثی ارتفاع، میانه و میانهٔ متقارن رسم شده از یک رأس مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

۴) از نقطهٔ وسط یک ضلع مثلث عمودهایی بر دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم. نشان دهید خطی که پای این عمودها را به‌هم وصل می‌کند بر میانهٔ متقارن وارد بر آن ضلع عمود است.

۵) نشان دهید که هر ضلع مثلث و میانهٔ متقارن وارد برآن، نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث مزدوج‌اند.

۶) روی ضلع BC از مثلث ABC نقطهٔ D را طوری تعیین کنید که اگر از این نقطه خطوطی موازی AB و AC رسم کنیم، AC و AB را در E و F قطع کنند و EF پادموازی BC باشد.

۷) میانهٔ متقارنی که در مثلث ABC از رأس A می‌گذرد، دایرهٔ محیطی مثلث را در D قطع می‌کند، و P، Q و R تصاویر نقطهٔ D روی اضلاع BC، CA و AB هستند، نشان دهید که $PQ = PR$.

۸) نشان دهید که این خطوط همرس‌اند: خطی که از رأس A در مثلث ABC به‌موازات ضلع BC رسم می‌شود، خطی که از مرکز دایرهٔ محیطی (O) بر میانهٔ متقارن گذرنده از رأس A عمود می‌شود، و خطی که از T، محل برخورد مماسهای رسم شده بر دایرهٔ محیطی مثلث در B و C، بر AO رسم می‌شود.

۹) اگر A' و B' در انعکاسی به مرکز O، منعکس نقاط A و B باشند، نشان دهید که میانه و میانهٔ متقارن گذرنده از رأس O در مثلث AOB به‌ترتیب میانهٔ متقارن و میانهٔ مثلث $A'OB'$ هستند.

۱۰) نشان دهید که نقاط برخورد سه میانهٔ متقارن یک مثلث با دایرهٔ محیطی مثلث، رأسهای مثلثی هستند که میانه‌های متقارنش همان میانه‌های متقارن مثلث مفروض هستند.

۱۱) میانه و میانهٔ متقارن رسم شده از رأس A در مثلث ABC دایرهٔ محیطی مثلث را در M' و N' قطع می‌کنند. نشان دهید که خطوط سیمسون M' و N' به‌ترتیب بر AN' و AM' عمودند.

II. نقطهٔ لوموان

۵۷۲. قضیه. سه میانهٔ متقارن مثلث همرس‌اند.

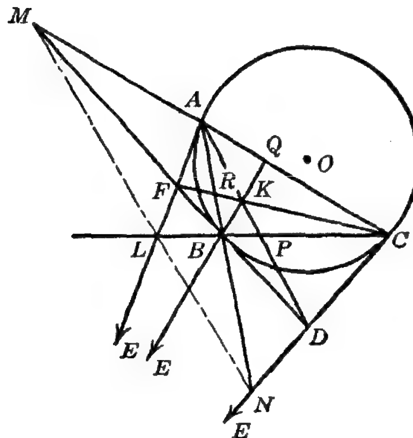
فرض کنید K نقطهٔ مشترک دو میانهٔ متقارن BK و AK از مثلث ABC (شکل ۱۳۹) باشد، و p، q و r فاصله‌های K از اضلاع a، b و c از مثلث ABC باشند. داریم (§۵۶۵)

$$p : r = a : c , \qquad q : r = b : c$$

پس

$$p : q = a : b$$

بنابراین، CK میانهٔ متقارن سوم مثلث ABC است (§۵۶۷).



شکل ۱۳۹

۵۷۳. تعریف. نقطهٔ همرسی میانه‌های متقارن یک مثلث، نقطهٔ میانه‌های متقارن یا نقطهٔ لوموان مثلث نامیده می‌شود. این نقطه را معمولاً با K نشان می‌دهند.

۵۷۴. نتیجه. فاصله‌های نقطهٔ لوموان K از اضلاع مثلث، با طول اضلاع متناسب‌اند، و K تنها نقطه‌ای در داخل مثلث است که چنین خاصیتی دارد. البته رأسهای مثلث مماسی مثلث مفروض نیز این خاصیت را دارند (§۵۶۶، §۵۶۰)

۵۷۵. ملاحظه. قضیه (§۵۷۲) را می‌توان با استفاده از ویژگیهای دیگر میانه‌های متقارن ثابت کرد. خواننده باید بتواند با استفاده از §۵۶۱ و قضیهٔ سِوا این کار را بکند. راههای دیگر را بعداً گوشزد خواهیم کرد.

۵۷۶. تعریف. هر خط مماس بر دایرهٔ محیطی در یک رأس مثلث ضلع روبروی آن رأس را در یک نقطه قطع می‌کند. سه نقطه‌ای که به‌این ترتیب به‌دست می‌آیند روی یک خط قرار دارند (§۳۱۹) که محور لوموان مثلث خوانده می‌شود.

۵۷۷. قضیه. نقطهٔ لوموان یک مثلث قطب محور لوموان مثلث نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث است.

اگر مماس AL بر دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC در رأس A، ضلع BC را در L قطع کند (شکل ۱۳۹)، خط قطبی L نسبت به (O) از A و D، یعنی قطب BC (§۳۷۹)، می‌گذرد؛ پس این خط قطبی همان میانهٔ متقارن AD است (§۵۶۰). برای نقاط مشابه M و N نیز وضعیت چنین است. چون نقاط L، M، و N همخط‌اند، نتیجه می‌شود که سه میانهٔ متقارن AD، BE، و CF همرس‌اند، و نقطهٔ مشترکشان قطب LMN است.

توجه کنید که چون نقطهٔ لوموان داخل مثلث، و بنابراین داخل دایرهٔ محیطی است، محور لوموان دایرهٔ محیطی را قطع نمی‌کند.

۵۷۸. تعریف. قطری از دایرهٔ محیطی مثلث که از نقطهٔ لوموان می‌گذرد، قطر بروکار مثلث نامیده می‌شود.

۵۷۹. نتیجه. قطر بروکار مثلث بر محور لوموان عمود است (§۳۷۵ الف).

۵۸۰. ملاحظه. دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC دایرهٔ محاطی داخلی مثلث مماسی DEF از مثلث ABC است، و در نتیجه، میانه‌های متقارن DA، EB و FC همرس‌اند (§۳۳۰) و نقطهٔ لوموان مثلث ABC نقطهٔ ژرگون مثلث مماسی DEF آن است.

۵۸۱. قضیه. نقطهٔ لوموان یک مثلث، قطب سه خطی محور لوموان برای آن مثلث است.

نقطهٔ برخورد محور لوموان LMN با ضلع BC، نقطهٔ L و پای میانهٔ متقارن AP از مثلث ABC نقطهٔ P است (شکل ۱۳۹). مزدوج همساز L نسبت به B و C نقطهٔ P است. نتیجهٔ مشابهی برای دو نقطهٔ M و Q و همچنین برای دو نقطهٔ N و R صادق است. بنابراین، هم می‌توان نتیجه گرفت که میانه‌های متقارن AP، BQ و CR همرس‌اند و هم اینکه نقطهٔ مشترک میانه‌های متقارن، یعنی K، قطب سه خطی LMN برای ABC است.

۵۸۲. نتیجه. رأسهای مثلث مماسی یک مثلث مفروض، وابسته‌های همساز نقطهٔ لوموان مثلث مفروض هستند.

۵۸۳. قضیه. مرکز ثقل مثلث پایی نقطهٔ لوموان، همان نقطهٔ لوموان است.

فرض کنید X، Y، و Z (شکل ۱۴۰) تصاویر نقطهٔ لوموان K از مثلث ABC بر اضلاع BC، CA و AB باشند و خطی که از Y به‌موازات KZ رسم می‌شود، امتداد KX را در X' قطع کند.

مثلثهای KYX' و ABC متشابه‌اند، زیرا اضلاعشان دوبه‌دو برهم عمودند؛ پس،

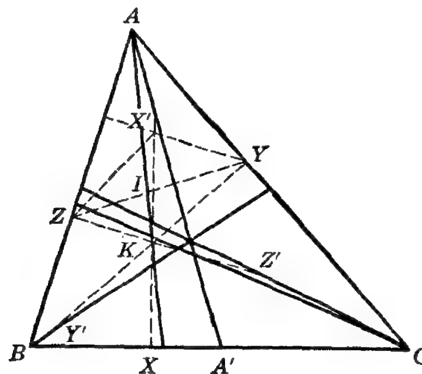
$$KY : AC = YX' : AB$$

ولی (§۵۶۵)

$$KY : AC = KZ : AB$$

پس $X'YKZ$ متوازی‌الاضلاع است و خط KX' از وسط YZ می‌گذرد، یعنی XK میانهٔ مثلث XYZ است. برای YK و ZK نیز مطلب مشابهی صادق است. بنابراین قضیه ثابت می‌شود.

۵۸۴. نتیجه. خطوط YX' و ZX' با KZ و KY موازی‌اند و بنابراین، بر AB و AC عمودند؛ پس X' مرکز ارتفاعی مثلث AYZ است و بنابراین، خط AX' بر YZ عمود است، یعنی AX' میانهٔ گذرنده از رأس A در مثلث ABC است (§۵۶۸).



شکل ۱۴۰

از طرف دیگر، اگر I وسط YZ باشد، داریم

$$KX' = ۲KI = KX$$

پس، متقارن تصویر نقطهٔ لوموان بر یک ضلع مثلث، نسبت به نقطهٔ لوموان، روی میانهٔ وارد بر آن ضلع قرار دارد.

۵۸۵. مسئله. از مثلثی محل دو رأس و محل نقطهٔ لوموان مفروض است. مثلث را رسم کنید.

راه‌حل اول. فرض کنید X تصویر نقطهٔ لوموان K (شکل ۱۴۰) بر ضلع واصل بین دو رأس مفروض B و C باشد. A'، نقطهٔ وسط BC، و X'، متقارن X نسبت به K، روی میانه‌ای از مثلث مطلوب ABC قرار دارند که از رأس A می‌گذرد (§۵۸۴).

خطی که از تصویرهای K روی AC و AB، یعنی نقاط Y و Z، می‌گذرد بر $AX'A'$ عمود است (§۵۶۵) و از نقطهٔ وسط KX'، یعنی نقطهٔ I، می‌گذرد (§۵۸۴). پس نقطهٔ Z را می‌توان نقطهٔ برخورد عمودی که از I بر $A'X'$ رسم می‌شود و دایره‌ای که KB قطر آن است، در نظر گرفت. خطوط $A'X'$ و BZ رأس سوم A را تعیین می‌کنند. مسئله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد یا اصلاً جواب نداشته باشد.

راه‌حل دوم. فرض کنید B و C رأسهای مفروض باشند، K نقطهٔ لوموان مثلث مطلوب ABC و G مرکز ثقل آن مثلث باشد. اگر خطوطی که از A به‌موازات BG و CG رسم می‌شوند BC را در D و E قطع

کنند، و A' وسط BC باشد، داریم

$$A'B : BD = A'G : GA = A'C : CE = ۱ : ۲$$

پس،

$$BD = CE = BC = a$$

و نقاط D و E را می‌توان رسم کرد.

از طرف دیگر، داریم (§۵۵۸)

$$\angle DAB = \angle GBA = \angle KBA' \ , \quad \angle CAE = \angle GCA = \angle KCA'$$

پس پاره‌خطهای معلوم BD و CE از رأس A با دو زاویهٔ معلوم دیده می‌شوند؛ پس A روی دو کمان معلوم (§۱۱، مکان هندسی ۷) قرار دارد. مسئله ممکن است دو یا یک جواب داشته، یا اصلاً جواب نداشته باشد.

۵۸۶. قضیه. نقطهٔ لوموان یک مثلث، نقطهٔ برخورد خطوطی است که وسط هر ضلع مثلث را به وسط ارتفاع وارد برآن ضلع وصل می‌کنند.

فرض کنید A رأس مثلث، P پای میانهٔ متقارن AP، K نقطهٔ لوموان، و D قطب BC نسبت به دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC باشد؛ A و P پاره‌خط KD را به‌طور همساز تقسیم می‌کنند (§۵۸۲)؛ پس $A'(APKD) = -۱$، که در آن A' وسط BC است. ارتفاع AA_h با $A'D$ موازی است؛ پس $A'K$ از نقطهٔ وسط AA_h می‌گذرد (§۳۵۱). برای دو ارتفاع دیگر نیز مطلب مشابهی صادق است.

۵۸۷. قضیه. نقطهٔ همنوای مرکز ارتفاعی مثلث، نقطهٔ لوموان مثلث پاد مکمل است.

ارتفاع $A'D'$ از مثلث پاد مکمل $A'B'C'$ برای مثلث ABC، ضلع BC را در نقطهٔ همنوای پای ارتفاع AD از مثلث ABC، یعنی نقطهٔ P، قطع می‌کند و P نقطهٔ وسط ارتفاع $A'D'$ است. از طرف دیگر، A نقطهٔ وسط $B'C'$ است. پس در مثلث ABC خط AP خط همنوای AD است، و در مثلث $A'B'C'$ خط AP نقطهٔ وسط ضلع $B'C'$، یعنی نقطهٔ A، را به وسط ارتفاع $A'D'$، یعنی نقطهٔ P، وصل می‌کند. برای BQ و CR نیز مطلب مشابهی صادق است. بنابراین، قضیه ثابت می‌شود (§۵۸۶).

تمرین

۱) اگر DEF مثلث ارتفاعی مثلث ABC باشد، نشان دهید که نقاط لوموان مثلثهای AEF، BFD و CDE روی میانه‌های ABC قرار دارند.

۲) مثلث ABC مفروض است، نشان دهید که سه مثلث $A'BC$، $B'CA$ و $C'BA$ وجود دارند، به‌طوری که هرکدام‌یک ضلع مشترک با مثلث ABC دارند و نقطهٔ لوموان آنها همان نقطهٔ لوموان K از مثلث ABC است. ثابت کنید که خطوط AA'، BB'، و CC' همرس‌اند.

۳) نشان دهید که فاصله‌های رأسهای یک مثلث از محور لوموان مثلث، با مربع ارتفاعهای متناظر متناسب‌اند.

۴) مثلثی را که محل تصاویر نقطهٔ لوموان آن برروی سه ضلع مفروض است، رسم کنید.

۵) از مثلثی محل یک رأس، محل مرکز ثقل، و محل نقطهٔ لوموان مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۶) از مثلثی راستای اضلاع AB و AC و محل نقطهٔ لوموان مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۷) نشان دهید که اضلاع مثلث پادک نقطهٔ لوموان یک مثلث مفروض، با میانه‌های مثلث مفروض متناسب‌اند، و زاویه‌های مثلث پادک با زاویه‌های بین میانه‌های مثلث مفروض برابرند.

۸) از رأسهای یک مثلث عمودهایی بر میانه‌ها رسم می‌کنیم، نشان دهید نقطهٔ لوموان مثلث تشکیل شده بر مرکز ثقل مثلث مفروض منطبق است.

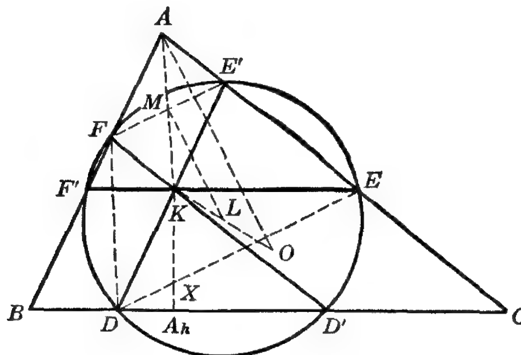
۹) از رأسهای B و C در مثلث ABC خطوطی به موازات مماسی که در A بر دایرهٔ محیطی (O) رسم شده است، رسم می‌کنیم، تا اضلاع AC و AB را در A' و A'' قطع کند. خط $A'A''$ ضلع BC را در U قطع می‌کند. نشان دهید که AU و خطهای BV و CW، که متناظر AU هستند، همرس‌اند.

۱۰) روی اضلاع یک مثلث سه مربع رسم می‌کنیم، به‌طوری‌که هر ضلع مثلث یک ضلع یکی از این مربعها باشد، و مربعها خارج مثلث قرار گیرند. در هر مربع ضلع موازی با ضلع مثلث را امتداد می‌دهیم تا یک مثلث تشکیل شود. از هر رأس مثلث حاصل خطی به رأس متناظرش در مثلث اصلی رسم می‌کنیم. نشان دهید که این سه خط همرس‌اند. (نقطهٔ همرسی بر نقطهٔ لوموان مثلث اصلی منطبق است.)

III. دایرهٔ لوموان

۵۸۸. قضیه. خطوطی که از نقطهٔ لوموان یک مثلث موازی با اضلاع مثلث رسم می‌شوند، اضلاع مثلث را در شش نقطهٔ همدایره قطع می‌کنند.

فرض کنید نقطهٔ K نقطهٔ لوموان مثلث ABC باشد و خطوط رسم شده از K به موازات اضلاع BC، CA و AB به‌ترتیب EKF'، $D'KF$، و DKE' باشند (شکل ۱۴۱) که این اضلاع را در نقاط D، D'؛ E، E'؛ و F، F' قطع می‌کنند. چون $AFKE'$ متوازی‌الاضلاع است، خط $E'F$ توسط میانهٔ متقارن AK نصف می‌شود و بنابراین، با BC پادموازی است (§۵۶۴ ب)، پس با EF' نیز پادموازی است، یعنی چهار نقطهٔ E، E'، F و F' همدایره‌اند.



شکل ۱۴۱

به‌دلایل مشابه، گروه‌های چهارتایی F، F'، D، D' و D، D'، E، E' نیز همدایره‌اند. اگر این سه دایره متمایز باشند محورهای اصلی آنها $DD' = BC$، $EE' = CA$، $FF' = AB$ باید همرس باشند (§۴۲۵)، و مسلماً این‌طور نیست. از طرف دیگر اگر دو دایره منطبق باشند، دایرهٔ سوم هم بر آنها منطبق است. پس نتیجه می‌گیریم که نقاط D، D'، E، E'، F، و F' همدایره‌اند.

۵۸۹. چند تعریف. دایره‌ای که از این شش نقطه می‌گذرد (§۵۸۸) دایرهٔ اول لوموان نامیده می‌شود.

خطوط موازی در نظر گرفته شده را غالباً موازیهای لوموان می‌خوانند.

۵۹۰. قضیه. مرکز دایرهٔ اول لوموان مثلث نقطهٔ وسط پاره‌خطی است که مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ لوموان مثلث را به هم وصل می‌کند.

فرض کنید O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC (شکل ۱۴۱)، L وسط OK، و M وسط پاره‌خطهای AK و $E'F$ باشد. پاره‌خط LM نقاط وسط دو ضلع مثلث KOA را به‌هم وصل می‌کند، پس با ضلع سوم آن، یعنی OA، موازی است: شعاع OA از دایرهٔ محیطی بر $E'F$ عمود است، زیرا $E'F$ با BC پادموازی است (§۱۸۵، §۱۸۸، §۵۸۸)؛ پس ML عمودمنصف $E'F$ است. به‌طور مشابه، عمودمنصفهای DF' و $D'E$ نیز از L می‌گذرند. پس قضیه ثابت می‌شود.

۵۹۱. ملاحظه. مثلثهای DEF و $D'E'F'$ همنهشت‌اند.

در دایرهٔ اول لوموان داریم (شکل ۱۴۱)

$$\angle FDE = \angle FF'E = \angle B, \angle DEF = \angle DD'F = \angle C$$

پس مثلث DEF با مثلث ABC متشابه است، این مطلب در مورد مثلث $F'D'E'$ نیز صادق است. پس دو مثلث DEF و $D'E'F'$ متشابه‌اند و در یک دایره محاط شده‌اند؛ پس همنهشت‌اند.

۵۹۲. قضیه. پاره‌خطهایی که دایرهٔ اول لوموان روی اضلاع یک مثلث جدا می‌کند، با مکعب اضلاع متناظر متناسب‌اند.

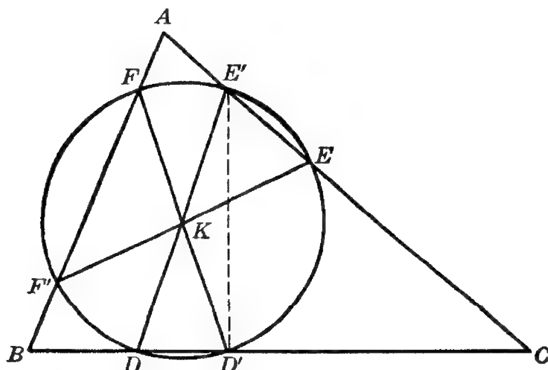
اگر AA_h و KX دو عمود از A و K بر BC باشند (شکل ۱۴۱)، در مثلثهای متشابه ABC و KDD' داریم

$$DD' : KX = BC : AA_h = BC^۲ : ۲S$$

که در آن S مساحت ABC است. KX و دو فاصلهٔ متناظر دیگر با اضلاع متناظر مثلث ABC متناسب‌اند (§۵۷۴)؛ بنابراین قضیه ثابت می‌شود.

۵۹۳. قضیه. سه خط پادموازی با اضلاع یک مثلث که از نقطهٔ لوموان می‌گذرند، روی جفت اضلاع غیرمتناظرشان شش نقطه تعیین می‌کنند؛ این شش نقطه روی دایره‌ای قرار دارند که مرکزش نقطهٔ لوموان است.

سه پادموازی رسم شده برابرند (§۵۷۰) و توسط نقطهٔ لوموان K نصف می‌شوند (§۵۶۴)؛ پس K از سرهای این سه پاره‌خط همفاصله است و بنابراین مرکز دایره‌ای است که از شش نقطهٔ در نظر گرفته شده می‌گذرد (شکل ۱۴۲).



شکل ۱۴۲

۵۹۴. چند تعریف. سه پادموازی در نظر گرفته شده (§۵۹۳) را غالباً پادموازیهای لوموان می‌نامند.

دایره‌ای که از این شش نقطه می‌گذرد، دایرهٔ دوم لوموان، یا دایرهٔ کسینوس مثلث نام دارد. نام دوم به

سبب ویژگی زیر به آن داده شده است.

۵۹۵. قضیه. پاره‌خطهایی که دایرهٔ دوم لوموان روی اضلاع یک مثلث جدا می‌کنند با کسینوسهای زاویه‌های مقابل اضلاع متناسب‌اند.

فرض کنید سه پادموازی EKF' ،$D'KF$، و DKE' (شکل ۱۴۲) که از نقطهٔ لوموان K نسبت به اضلاع BC ،CA و AB رسم شده‌اند، این اضلاع را در D ،D'؛ E ،E'؛ و F ،F' قطع کنند. پاد موازی DE' قطری از دایرهٔ (K) است (§۵۹۳)، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $D'DE'$ داریم:

$$DD' = DE' \cos \angle D'DE' = DE' \cos A$$

به‌طور مشابه،

$$EE' = EF' \cos B \quad , \qquad FF' = FD' \cos C$$

و چون $DE' = EF' = FD'$ (§۵۹۳)، قضیه ثابت می‌شود.

۵۹۶. قضیه. دایرهٔ اول لوموان دایرهٔ دوم لوموان را نصف می‌کند.

از نقطهٔ لوموان K در مثلث ABC خط $B'C'$ را موازی با BC و خط $B''C''$ را پادموازی با BC رسم می‌کنیم. چهار نقطهٔ B' ،C' ،B'' و C'' همدایره‌اند؛ پس داریم

$$KB' \cdot KC' = KB'' \cdot KC''$$

یعنی نقطهٔ K روی محور اصلی دو دایرهٔ لوموان قرار دارد. چون K مرکز دایرهٔ دوم لوموان است، اثبات قضیه کامل شده است.

تمرین

۱) نشان دهید که در شکل ۱۴۱ پاره‌خطهای $E'F$ ،$F'D$ و $D'E$ برابرند.

۲) نشان دهید که در شکل ۱۴۱ اگر خطهای $E'F$ ،$F'D$ و $D'E$ را امتداد دهیم، مثلثی تشکیل می‌شود، که دایرهٔ محاطی داخلی‌اش بر دایرهٔ اول لوموان مثلث ABC منطبق و با دایرهٔ نه نقطهٔ آن برابر است.

۳) نشان دهید که مجموع مساحتهای $AE'F$ ،$BF'D$ و $CD'E$ (شکل ۱۴۱) با مساحت DEF برابر است.

۴) نشان دهید که خطوط $E'F$ ،$F'D$ و $D'E$ (شکل ۱۴۱) به‌ترتیب اضلاع BC ،CA و AB را روی محور اصلی دایرهٔ محیطی و دایرهٔ اول لوموان مثلث ABC قطع می‌کنند.

۵) نشان دهید که محور اصلی دایرهٔ اول لوموان و دایرهٔ نه نقطهٔ یک مثلث از نقاط برخورد موازیهای لوموان و اضلاع متناظر مثلث ارتفاعی عبور می‌کند.

۶) نشان دهید که محور اصلی دایرهٔ دوم لوموان و دایرهٔ نه نقطهٔ یک مثلث از نقاط برخورد پادموازیهای لوموان با اضلاع متناظر مثلث میانک عبور می‌کند.

ج. دایره‌های آپولونیوسی

۵۹۷. تعریف. نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌های A ،B، و C از مثلث ABC اضلاع مقابل این رأسها، یعنی BC ،CA و AB را به‌ترتیب در نقاط U ،U' ،V ،V'؛ و W ،W' قطع می‌کنند (شکل ۱۴۳). دایره‌هایی که UU' ،VV' و WW' قطرشان هستند، دایره‌های آپولونیوسی مثلث ABC نامیده می‌شوند.

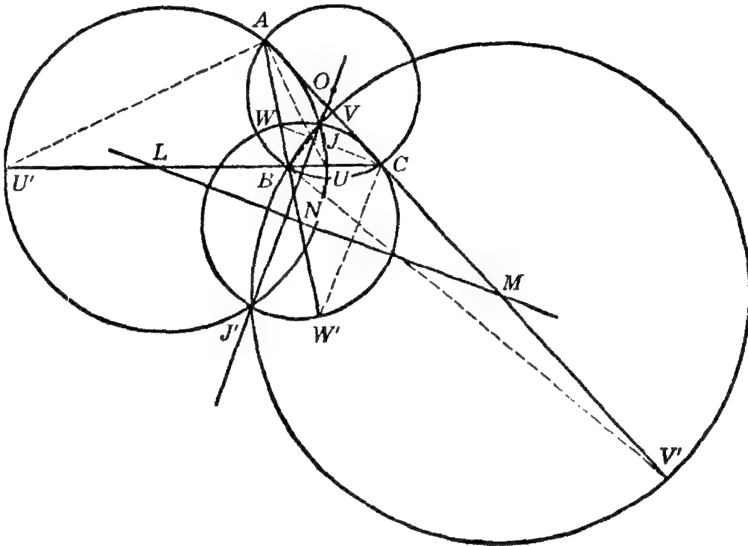
۵۹۸. قضیه. دایره‌های آپولونیوسی از رأسهای متناظر مثلث می‌گذرند.

دایرهٔ (L) که UU' قطر آن است، مکان هندسی نقاطی است که نسبت فواصلشان از نقاط B و C

برابر است با (مکان هندسی ۱۱، §۱۱)

$$BU : CU = BU' : CU'$$

چون $AB : AC = BU : CU$؛ پس A نقطه‌ای از این مکان هندسی است. برای دو دایرهٔ آپولونیوسی (M) و (N) نیز مطلب مشابهی صادق است.



شکل ۱۴۳

راه دیگر. پاره‌خط UU' از نقطهٔ A با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود، پس A روی دایرهٔ (L) قرار دارد.

برای دایره‌های آپولونیوسی (M) و (N) نیز مطلب مشابهی صادق است.

۵۹۹. قضیه. دایرهٔ محیطی مثلث بر سه دایرهٔ آپولونیوسی مثلث عمود است.

داریم $(BCUU') = -1$؛ پس نقاط B و C نسبت به دایرهٔ (L) وارون یکدیگرند (شکل ۱۴۳)؛ پس (L) بر دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC عمود است (§۳۶۹). برای دایره‌های (M) و (N) نیز وضعیت مشابهی داریم.

۶۰۰. قضیه. سه دایرهٔ آپولونیوسی یک مثلث دو نقطهٔ مشترک دارند.

دایرهٔ آپولونیوسی (M) از رأس B، که داخل دایرهٔ (L) است، می‌گذرد؛ پس دو دایرهٔ (L) و (M) متقاطع‌اند (شکل ۱۴۳). به‌طور مشابه، دایره‌های (L)، (N) و (M)، (N) نیز چنین‌اند.

اگر J یکی از دو نقطهٔ برخورد (L) و (M) باشد، داریم (§۵۹۸)

$$JA : JC = BA : BC, JB : JC = BA : CA$$

پس،

$$JA : JB = CA : CB$$

یعنی نقطهٔ J روی دایرهٔ (N) هم هست.

راه دیگر. دایره‌های (L)، (M)، و (N) بر دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC عمودند (§۵۹۹)، پس مراکزشان L، M، و N) نقاط برخورد مماسهایی که در A، B، و C بر دایرهٔ (O) رسم می‌شوند با اضلاع BC، CA و AB هستند. چون L، M، و N همخط‌اند (§۳۱۹) و روی محور لوموان مثلث ABC قرار دارند (§۵۷۶)، دایره‌های (L)، (M) و (N) هم‌محورند (§۴۵۸). این دسته دایرهٔ هم‌محور از نوع متقاطع است، زیرا دسته دایرهٔ هم‌محور مزدوج آن، که توسط (O) و خط LMN تعیین می‌شود از نوع نامتقاطع است، زیرا محور لوموان LMN دایرهٔ محیطی (O) را قطع نمی‌کند (§۵۷۷).

۶۰۱. تعریف. دو نقطهٔ J و J'، نقاط مشترک دایره‌های آپولونیوسی یک مثلث، نقاط همپویای آن مثلث نامیده می‌شوند.

۶۰۲. قضیه. نقاط همپویای یک مثلث روی قطر بروکار آن مثلث قرار دارند.

محور اصلی JJ' برای سه‌دایرهٔ آپولونیوسی بر خط مرکزی آنها، یعنی محور لوموان مثلث، عمود است و از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، یعنی نقطهٔ O می‌گذرد (§۴۲۸ الف)؛ بنابراین اثبات قضیه کامل می‌شود (§۵۷۹).

۶۰۳. نتیجه. نقاط همپویا نسبت به دایرهٔ محیطی وارون یکدیگرند و قطر بروکار را به‌طور همساز تقسیم می‌کنند (§۴۴۸).

۶۰۴. قضیه. دایره‌های آپولونیوسی یک مثلث، دایره‌های تشابه سه دایره‌اند، که مراکزشان رأسهای مثلث مفروض‌اند و شعاعهایشان با ارتفاعهای متناظر مثلث متناسب‌اند.

داریم (§۵۹۸) (شکل ۱۴۳)

$$BU : CU = AB : AC = h_b : h_c = kh_b : kh_c$$

که در آن، k یک ضریب دلخواه است. پس U مرکز تشابه داخلی دو دایرهٔ (B, kh_b) و (C, kh_c) است، پس U' مرکز تشابه خارجی آنهاست.

به‌همین ترتیب، V و V'، و W و W' مراکز تشابه جفت دایره‌های (C, kh_c) و (A, kh_a)، و (A, kh_a) و (B, kh_b) هستند.

۶۰۵. ملاحظه. ویژگیهای §۵۹۹ و §۶۰۰ نتایج بی‌واسطهٔ این قضیه هستند (§۴۹۶، §۶۰۴).

۶۰۶. قضیه. وتر مشترک دایرهٔ محیطی و یک دایرهٔ آپولونیوسی یک مثلث بر میانهٔ متقارن متناظر با آن دایره منطبق است.

دایرهٔ محیطی (O) (شکل ۱۴۴) و یک دایرهٔ آپولونیوسی، مثلاً (L)، متعامدند (§۵۹۹)؛ پس وتر مشترکشان خط قطبی مرکز دایرهٔ (L) نسبت به (O) است؛ در نتیجه اثبات قضیه کامل می‌شود (§۵۶۱).

۶۰۷. نتیجه. نقاط برخورد میانه‌های متقارن یک مثلث با دایرهٔ محیطی، روی دایره‌های آپولونیوسی متناظر نیز قرار دارند.

۶۰۸. قضیه. خط قطبی مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث نسبت به یک دایرهٔ آپولونیوسی بر میانهٔ متقارن متناظر با آن دایرهٔ آپولونیوسی منطبق است.

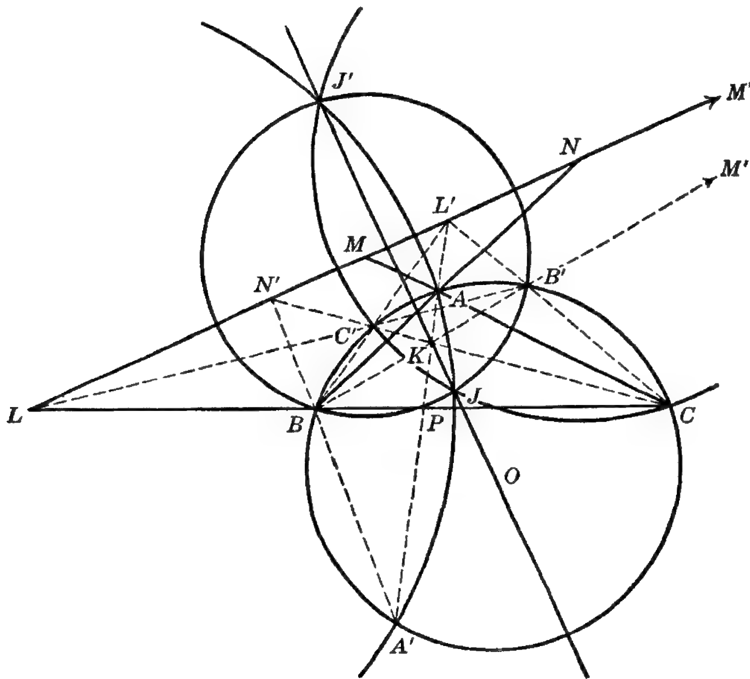
در واقع، وتر مشترک دو دایرهٔ متعامد (O) و (L) (§۶۰۶) خط قطبی O نسبت به (L) نیز هست.

۶۰۹. نتیجه. نقاط همپویای یک مثلث توسط مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ لوموان به‌طور همساز تقسیم می‌شوند.

۶۱۰. ملاحظه. قطب دایرهٔ بروکار نسبت به یک دایرهٔ آپولونیوسی مثلث، نقطهٔ برخورد محور لوموان و میانهٔ متقارن گذرنده از رأس در نظر گرفته شده است.

قطب قطر بروکار OK نسبت به دایرهٔ (L) روی قطر LMN از دایرهٔ (L)، که بر OK عمود است، و روی خط قطبی نقطهٔ O نسبت به دایرهٔ (L)، یعنی خط AK، قرار دارد.

۶۱۱. مشاهده. فرض کنید A'، B'، C' (شکل ۱۴۴) نقاط برخورد میانه‌های متقارن AKA'، BKB' و CKC' از مثلث ABC با دایرهٔ محیطی (O) از آن مثلث باشند، پس (O) دایره‌های آپولونیوسی (M) و (N) را در چهار نقطهٔ B، B'، C، و C' قطع می‌کند و براین دایره‌ها عمود است (۵۹۹§)؛ پس دو خط BB' و CC' روی محور اصلی دایره‌های (M) و (N) یکدیگر را قطع می‌کنند (۴۳۷§) و نقطهٔ برخورد آنها K است؛ دو خط BC و $B'C'$ در یکی از مراکز تشابه (M) و (N) یکدیگر را قطع می‌کنند، و دو خط BC' و $B'C$ در مرکز تشابه دیگر (M) و (N) یکدیگر را قطع می‌کنند. مراکز تشابه روی خط‌المرکزین دو دایره، یعنی محور لوموان LMN قرار دارند.



شکل۱۴۴

۶۱۲. قضیه. مرکز هر دایرهٔ آپولونیوسی یک مثلث، یک مرکز تشابه دو دایرهٔ آپولونیوسی دیگر آن مثلث است.

یکی از دو مرکز تشابه دو دایرهٔ (M) و (N) (شکل ۱۴۴) روی خط BC و روی محور لوموان LMN از مثلث ABC قرار دارد (۶۱۱§)، و این دو خط در مرکز دایرهٔ آپولونیوسی سوم مثلث ABC، یعنی نقطهٔ L، باهم برخورد می‌کنند.

۶۱۳. نتیجه. هر میانهٔ متقارن یک مثلث، محور لوموان را در یک مرکز تشابه دو دایرهٔ آپولونیوسی گذرنده از دو رأس دیگر مثلث، قطع می‌کند.

دومین مرکز تشابه دایره‌های (M) و (N) را نقطهٔ L' (شکل ۱۴۴) می‌نامیم. L' و L توسط M و N به‌طور همساز تقسیم می‌شوند؛ پس دو خط AL' و AL توسط خطوط ABN و ACM به‌طور همساز تقسیم می‌شوند، یعنی AL' میانهٔ متقارن گذرنده‌از رأس A است (§۵۶۲).

۶۱۴. قضیه. نقاط برخورد دو میانهٔ متقارن یک مثلث با دایرهٔ محیطی، با مرکز دایرهٔ آپولونیوسی گذرنده از رأس سوم همخط‌اند.

خطوط BC و $B'C'$ (§۶۱۱) (شکل ۱۴۴) محور لوموان را در نقطهٔ L قطع می‌کنند (§۶۱۲).

۶۱۵. قضیه. دو خطی که دو رأس یک مثلث را به نقاط برخورد میانه‌های متقارن این رأسها با دایرهٔ محیطی وصل می‌کنند، یکدیگر را در نقطهٔ برخورد میانهٔ متقارن سوم با محور لوموان، قطع می‌کنند.

خطوط BC' و $B'C$ یکدیگر را در مرکز تشابه L' از دو دایرهٔ آپولونیوسی (M) و (N) قطع می‌کنند (§۶۱۱)، و این نقطه محل برخورد میانهٔ متقارن AKA' با محور لوموان LMN نیز هست (§۶۱۳).

۶۱۶. قضیه. سه نقطهٔ برخورد میانه‌های متقارن یک مثلث با دایرهٔ محیطی، رأسهای مثلثی هستند که دایره‌های آپولونیوسی آن، همان دایره‌های آپولونیوسی مثلث اصلی است.

دایرهٔ آپولونیوسی (L_o) از مثلث $A'B'C'$ که از A' می‌گذرد باید بر (O) عمود باشد (شکل ۱۴۴) و مرکزش روی مماس بر (O) در A' و روی خط $B'C'$ باشد. هردو خط از نقطهٔ L می‌گذرند (§۶۰۶، §۶۱۴)؛ پس (L_o) بر دایرهٔ (L) از مثلث ABC منطبق است. برای دایره‌های (M) و (N) نیز مطلب مشابهی صادق است.

۶۱۷. نتیجه. دو مثلث در نظر گرفته شده میانه‌های متقارن یکسان، نقطهٔ لوموان یکسان، محور لوموان یکسان، و نقاط همپویای یکسان دارند.

۶۱۸. تعریف. یک مثلث و مثلثی را که رأسهای آن نقاط برخورد میانه‌های متقارن مثلث اول با دایرهٔ محیطی‌اش هستند، مثلثهای هم میانهٔ متقارن می‌نامند. علت این نامگذاری با توجه به ویژگیهای دو مثلث (§۶۱۷) روشن است.

۶۱۹. قضیه. نقطهٔ برخورد یک میانهٔ متقارن یک مثلث با ضلع روبرو، نقطهٔ لوموان مثلثی است که یک رأس آن رأس متناظر مثلث هم میانهٔ متقارن است و دو رأس دیگر آن نقاط همپویای دو مثلث هم میانهٔ متقارن مفروض هستند.

دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC (شکل ۱۴۴) دایرهٔ آپولونیوسی مثلث $A'JJ'$ متناظر با رأس A' است، زیرا (O) از A' می‌گذرد، بر دایرهٔ محیطی (L) از مثلث $A'JJ'$ عمود است، و مرکزش روی ضلع مقابل رأس A'، یعنی JJ'، قرار دارد. پس، وتر مشترک $A'A$ در دایره‌های (O) و (L) میانهٔ متقارن مثلث $A'JJ'$ است (§۶۰۶).

اگر P نقطهٔ برخورد میانهٔ متقارن AA' و ضلع BC باشد، آنگاه $(LPBC) = -۱$؛ پس $N'(LPBC) = -۱$. ولی خطوط $N'B$ و $N'C$ همان خطوط $N'BA'$ و $N'CC'K$ هستند (§۶۱۵)؛ پس $(A'KL'P) = -۱$. اما L' قطب ضلع JJ' از مثلث $A'JJ'$ نسبت به دایرهٔ محیطی (L) از مثلث $A'JJ'$ است (§۶۱۰)؛ پس مزدوج همساز L' نسبت به رأس A' و K، نقطهٔ برخورد $A'L'$ با ضلع JJ'، یعنی نقطهٔ P است که نقطهٔ لوموان مثلث $A'JJ'$ است (§۵۸۱، §۵۸۲). به‌این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۶۲۰. ملاحظه. Q و R، نقاط برخورد میانه‌های متقارن BK و CK از مثلث ABC با اضلاع CA و AB، یعنی نقاط لوموان مثلثهای $B'JJ'$ و $C'JJ'$ هستند. P'، Q' و R'، نقاط برخورد میانه‌های متقارن $AA'K$،

$BB'K$، و $CC'K$ با اضلاع $B'C'$، $C'A'$ و $A'B'$ از مثلث هم میانهٔ متقارن، نقاط لوموان مثلثهای AJJ'، BJJ' و CJJ' هستند.

۶۲۱. قضیه. نقاط همپویای یک مثلث و یک رأس آن مثلث، مثلث دیگری را تعیین می‌کنند که نقاط همپویای آن رأسهایی از مثلث هم میانهٔ متقارن مثلث اصلی هستند که با رأس در نظر گرفته شدهٔ مثلث اصلی متناظر نیستند.

خط واصل بین L، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A'JJ'$ (شکل ۱۴۴)، و نقطهٔ لوموان P از مثلث $A'JJ'$ (§۶۱۹) قطر بروکار $A'JJ'$ است؛ پس LP دایرهٔ آپولونیوسی (O) از مثلث $A'JJ'$ را در نقاط همپویای B و C از مثلث $A'JJ'$ قطع می‌کند، و قضیه ثابت می‌شود.

۶۲۲. ملاحظه. محور لوموان مثلث $A'JJ'$ (§۶۲۱) بر قطر بروکار LP عمود است و از مرکز دایرهٔ آپولونیوسی (O) از مثلث $A'JJ'$ می‌گذرد؛ پس محور لوموان $A'JJ'$ عمودمنصف BC است.

پس محورهای لوموان شش مثلث $JJ'A'$، $JJ'B'$، $JJ'C'$، $JJ'A$، $JJ'B$، و $JJ'C$ یک نقطهٔ مشترک دارند.

۶۲۳. مسئله. مثلثی را که محل نقطهٔ لوموان، محل مرکز دایرهٔ محیطی و محل یک رأس آن مفروض است (K, O, A)، رسم کنید.

فرض کنید خط AK دایرهٔ (O, OA) را در A' نیز قطع کند (شکل ۱۴۴). اگر L' مزدوج همساز K نسبت به A و A' (§۵۷۷) و P مزدوج همساز L' نسبت به K و A' باشد (§۶۱۹)، خطی که P را به L، قطب AK نسبت به دایرهٔ (O, OA)، وصل می‌کند این دایره را در دو رأس دیگر مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

با فرض اینکه K داخل دایرهٔ (O, OA) قرار داشته باشد، مسئله یک و تنها یک جواب دارد.

۶۲۴. قضیه. هر دایرهٔ آپولونیوسی یک مثلث، دو دایرهٔ آپولونیوسی دیگر را با زاویهٔ 120° قطع می‌کند.

نقطهٔ L (شکل ۱۴۴) مرکز تشابه دو دایرهٔ آپولونیوسی (M) و (N) است (§۶۱۲)، و دایرهٔ (L) با (M) و (N) هم‌محور است؛ پس این دو دایره نسبت به (L) منعکس یکدیگرند (§۵۲۷، §۵۴۳) و بنابراین، زاویهٔ بین (L) و (M) با زاویهٔ بین (L) و (N) برابر است، یعنی (L) زاویهٔ بین دایره‌های (M) و (N) را نصف می‌کند. دایرهٔ (M) نسبت به (L) و (N) و دایرهٔ (N) نسبت به (L) و (M) نیز چنین وضعیتی دارند. پس هریک از دایره‌های آپولونیوسی زاویهٔ بین دو دایرهٔ دیگر را نصف می‌کند (§۵۳۱)؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

تمرین

۱) نشان دهید که عمودمنصفهای نیمسازهای داخلی زاویه‌های یک مثلث اضلاع متناظر مثلث را در سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند.

۲) در مثلث ABC داریم $BC > CA > AB$. نشان دهید که مجموع معکوس قطرهای دایره‌های آپولونیوسی متناظر با اضلاع BC و AB با معکوس قطر دایرهٔ آپولونیوسی متناظر با CA برابر است.

۳) نشان دهید که فاصله‌های رأسهای یک مثلث از یک نقطهٔ همپویا به‌ترتیب با اضلاع روبروی آن رأسها متناسب‌اند.

۴) سه دایره رسم کنید، به‌طوری‌که مرکز هرکدام روی دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ دیگر باشد.

۵) نشان دهید که میانهٔ رسم شده از یک رأس مثلث دایرهٔ آپولونیوسی گذرنده از آن رأس و دایرهٔ محیطی را در دو نقطه قطع می‌کند که همراه با دو رأس دیگر مثلث رأسهای یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۶) نشان دهید که متقارنهای دایره‌های آپولونیوسی یک مثلث نسبت به عمودمنصفهای اضلاع متناظرشان، هم‌محورند و محور اصلی آنها از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد.

د. خطوط همزاویه

۶۲۵. تعریف. دو خط که از رأس یک زاویه می‌گذرند و با نیمساز آن زاویه، زاویه‌هایی برابر می‌سازند، همزاویه، یا مزدوجهای همزاویه نامیده می‌شوند.

پس ارتفاع و قطر دایرهٔ محیطی گذرنده از یک رأس مثلث، دو خط همزاویه هستند (§۷۳ ب). یک مثال دیگر از مزدوجهای همزاویه، میانه و میانهٔ متقارن گذرنده از یک رأس مثلث هستند (§۵۵۸).

نیمساز یک زاویه بر مزدوج همزاویهٔ خود منطبق است.

۶۲۶. قضیه. خطی که نقاط برخورد دو خط همزاویه با دایرهٔ محیطی مثلث را به‌هم وصل می‌کند با ضلع مقابل به رأس در نظر گرفته شده، موازی است.

۶۲۷. قضیه. خطی که تصاویر یک نقطهٔ دلخواه بر اضلاع یک زاویه را به‌هم وصل می‌کند، بر مزدوج همزاویهٔ خطی که از آن نقطه به رأس زاویه وصل می‌شود، عمود است.

اینها تعمیم قضیه‌های مربوط به میانه‌های متقارن (§۵۵۹، §۵۶۸) هستند. اثباتها نیز شبیه اثباتهای قبلی است.

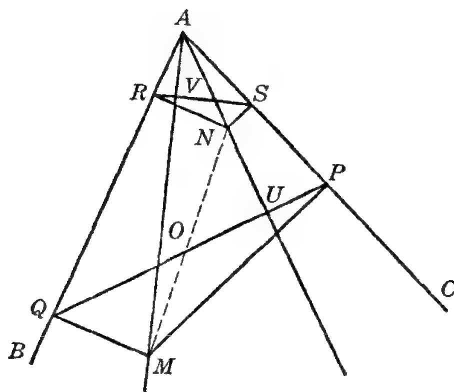
۶۲۸. قضیه. فاصله‌های دو نقطهٔ روی دو خط همزاویه از اضلاع زاویه باهم تناسب معکوس دارند.

فرض کنید M و N دو نقطه از خطوط همزاویهٔ AM و AN (شکل ۱۴۵) باشند و MQ، MP، NR و NS چهار عمودی باشند که از M و N بر اضلاع AB و AC از زاویهٔ BAC رسم شده‌اند.

با توجه به دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متشابه AMQ، ANS و همچنین، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متشابه AMP، ANR، داریم

$$MQ : NS = AQ : AS = AM : AN = AP : AR = MP : NR \qquad (۱)$$

و قضیه با توجه به تساوی دو نسبت اول و آخر اثبات می‌شود.



شکل۱۴۵

۶۲۹. نتیجه. حاصل‌ضرب فاصله‌های دو نقطهٔ واقع برروی دو خط هم زاویه از یک ضلع زاویه با حاصل‌ضرب فاصله‌های این دو نقطه از ضلع دیگر زاویه برابر است.

داریم (§۶۲۸)

$$MP \cdot NS = MQ \cdot NR$$

۶۳۰. قضیهٔ عکس. اگر فاصله‌های دو نقطه از اضلاع یک زاویه تناسب معکوس داشته باشند، آن‌گاه آن دو نقطه روی دو خط همزاویه قرار دارند.

بنابر فرض، داریم (شکل ۱۴۵)

$$MP : MQ = NR : NS$$

و زاویه‌های M و N مکمل زاویهٔ A هستند؛ پس دو مثلث MPQ و NRS متشابه‌اند؛ پس زاویه‌های QPM و NRS برابرند. حال با توجه به دو چهارضلعی محاطی $APMQ$ و $ARNS$، داریم

$$\angle QAM = \angle QPM \text{ و } \angle NAS = \angle NRS$$

و اثبات قضیه کامل است (§۶۲۵).

۶۳۱. قضیه. تصویرهای دو نقطه از دو خط همزاویه روی اضلاع زاویه چهار نقطهٔ همدایره هستند.

با توجه به رابطهٔ (۱) (§۶۲۸)، داریم

$$AQ \cdot AR = AP \cdot AS$$

پس P، Q، R، و S همدایره‌اند.

۶۳۲. نتیجه. دو خط PQ و RS نسبت به اضلاع زاویهٔ PAQ پادموازی‌اند.

۶۳۳. ملاحظه. مرکز دایرهٔ $PQRS$ (§۶۳۱) نقطهٔ وسط MN است (شکل ۱۴۵).

مرکز دایرهٔ مذکور، نقطهٔ مشترک عمودمنصفهای پاره‌خطهای QR و PS است، و هرکدام از این عمودمنصفها از وسط MN، یعنی نقطهٔ O، می‌گذرند.

۶۳۴. قضیه. اگر دو خط نسبت به اضلاع یک زاویه پادموازی باشند، عمودهایی که از رأس زاویه بر آنها رسم می‌شوند، در آن زاویه، خطوط همزاویه هستند.

اگر PQ و RS نسبت به اضلاع $\angle PAQ$ (شکل ۱۴۵) پادموازی باشند، و U و V پای عمودهای رسم شده از A بر PQ و RS باشند، در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AUP و ARV زاویه‌های P و R برابرند، پس زاویه‌های PAU و RAV برابرند، و اثبات قضیه کامل می‌شود.

تمرین

۱) مزدوج همزاویهٔ خطی که از رأس A در مثلث ABC به موازات ضلع BC رسم می‌شود، ضلع BC را در M قطع می‌کند، و S محل برخورد میانهٔ متقارن AS و ضلع BC است. نشان دهید که $BM : CM = BS : CS$.

۲) (الف) M و N نقاط برخورد BC و دو خط همزاویهٔ AM و AN هستند، نشان دهید که $CM \cdot CN : BM \cdot BN = b^2 : c^2$؛ (ب) خطوطی را که از هر رأس مثلث به نقطهٔ برخورد ضلع مقابل آن رأس با یک مورب، رسم می‌شوند در نظر بگیرید. نشان دهید که مزدوجهای همزاویهٔ این سه‌خط اضلاع مقابل را در سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند.

۳) نشان دهید که مزدوج همزاویهٔ خطی که از یک نقطه به رأس یک زاویه وصل می‌شود، عمود منصف پاره‌خط واصل بین نقاط متقارن نقطهٔ مفروض نسبت به اضلاع زاویه است.

۴) دو مثلث ABC و $A'B'C'$ منظری هستند و در دایرهٔ (O) محاط‌اند؛ A''، B''، C'' نقاط برخورد BC، CA و AB با مزدوجهای همزاویهٔ خطوط $A'A$، $B'B$، و $C'C$ هستند. نشان دهید که خطوط

AA''، BB'' و CC'' همرس‌اند.

۵) اگر P نقطهٔ مشترک دایره‌های محیطی چهار مثلث تعیین شده توسط چهار خط مفروض (§۲۹۷) باشد، نشان دهید که مزدوجهای همزاویهٔ شش خط واصل بین P و نقاط برخورد چهار خط مفروض، موازی‌اند.

۶) دو خط مزدوج همزاویه در یک مثلث مفروض‌اند؛ پاره‌خطی را که روی یکی از این خطوط توسط رأس و ضلع مقابل جدا می‌شود در وتری که دایرهٔ محیطی روی دیگری جدا می‌کند ضرب می‌کنیم. نشان دهید که این حاصلضرب با حاصلضرب دو ضلع مثلث که از رأس مذکور می‌گذرند برابر است.

۷) در چهار نقطهٔ همدایره روی اضلاع یک زاویه عمودهایی بر آن اضلاع رسم می‌کنیم. نشان دهید که این عمودها یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند که در آن، هر دو رأس روبروی هم روی خطوطی همزاویه نسبت به زاویهٔ مفروض قرار دارند.

۶۳۵. قضیه. مزدوجهای همزاویهٔسه خطی که از یک نقطه به رأسهای مثلث رسم می‌شوند، همرس‌اند.

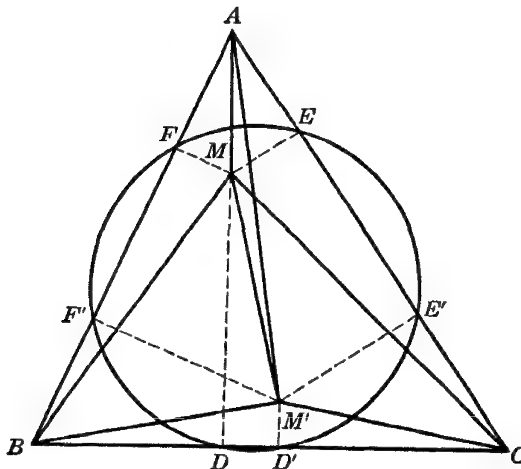
فرض کنید M' (شکل ۱۴۶) نقطهٔ برخورد AM'، همزاویهٔ AM، با BM'، همزاویهٔ BM، باشد. داریم (§۶۲۸)

$$ME : MF = M'F' : M'E' \text{ و } MF : MD = M'D' : M'F'$$

پس با ضرب کردن به دست می‌آوریم

$$ME : MD = M'D' : M'E'$$

یعنی خطوط CM و CM' مزدوجهای همزاویه هستند (§۶۳۰)؛ به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.



شکل ۱۴۶

۶۳۶. تعریف. نقاط M و M' را نقاط مزدوج همزاویه یا نقاط همزاویه نسبت به مثلث ABC می‌خوانند.

پس مرکز ارتفاعی و مرکز دایرهٔ محیطی دو نقطهٔ مزدوج همزاویه نسبت به مثلث هستند؛ مرکز ثقل و نقطهٔ لوموان نیز دو نقطهٔ همزاویهٔ دیگر نسبت به مثلث هستند.

مزدوج همزاویهٔ مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، نسبت به آن مثلث، بر خودش منطبق است.

۶۳۷. نتیجه. عمودهایی که از رأسهای یک مثلث بر اضلاع متناظر مثلث پادک یک نقطهٔ مفروض رسم می‌شوند همرس‌اند.

در واقع، خطوط AM'، BM'، و CM' (شکل ۱۴۶) بر EF، FD، و DE عمودند (§۶۲۷).

۶۳۸. ملاحظه. اگر نقطهٔ M (§۶۳۵) روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار داشته باشد، آنگاه خطوط همزاویهٔ AM، BM و CM موازی‌اند و برعکس، اگر مزدوجهای همزاویهٔ خطوط AM، BM و CM موازی باشند، آنگاه نقطهٔ M روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد.

اگر X، Y، Z تصاویر M بر روی اضلاع ABC باشند، مزدوجهای همزاویهٔ AM، BM، و CM، یعنی خطوط p، q، r، بر خطوط YZ، ZX و XY عمودند (§۶۲۷). اگر M روی دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC باشد، نقاط X، Y، Z همخط‌اند (§۲۸۲ الف)؛ پس p، q، و r موازی‌اند.

برعکس، اگر p، q، و r موازی باشند، YZ، ZX، و XY نیز موازی‌اند (§۶۲۷)، یعنی نقاط X، Y، و Z همخط‌اند، و M روی (O) قرار دارد (§۲۸۲ ب).

۶۳۹. تعریف. از یک نقطه خطوطی به رأسهای یک مثلث رسم می‌کنیم، و براین خطوط عمودهایی در محل رأسها رسم می‌کنیم. این عمودها مثلثی تشکیل می‌دهند که مثلث پادپایی آن نقطه نسبت به مثلث مفروض خوانده می‌شود.

۶۴۰. قضیه. اگر دو نقطه نسبت به یک مثلث همزاویه باشند، مثلث پایی یک نقطه بامثلث پادپایی نقطهٔ دیگر متجانس است.

اگر E و F پای عمودهایی باشند که از نقطهٔ مفروض M بر اضلاع AC و AB از مثلث ABC رسم می‌شوند، خط EF بر مزدوج همزاویهٔ AM در زاویهٔ A عمود است (§۶۲۷)؛ مزدوج AM از نقطهٔ M'، که مزدوج همزاویهٔ M نسبت به مثلث ABC است، می‌گذرد؛ پس EF با ضلعی از مثلث پادپایی M' که از A می‌گذرد، موازی است.

برای اضلاع دیگر مثلث پایی M و مثلث پادپایی M' نیز مطلب مشابهی صادق است. پس اثبات قضیه کامل است.

۶۴۱. قضیه. شش تصویر دو نقطهٔ مزدوج همزاویه بر اضلاع مثلث همدایره‌اند.

شش تصویر، چهار به چهار روی دایره‌هایی قرار دارند که مراکزشان وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ مزدوج همزاویه است (§۶۳۱، §۶۳۳)؛ پس سه دایره بر هم منطبق‌اند.

۶۴۲. تعریف. این دایره (§۶۴۱) را غالباً دایرهٔ پایی دو نقطهٔ مزدوج همزاویه می‌نامند.

۶۴۳. قضیه عکس. دایرهٔ محیطی مثلث پایی یک نقطه نسبت به یک مثلث مفروض، اضلاع مثلث مفروض را در رأسهای مثلث پایی یک نقطهٔ دیگر قطع می‌کند، که این نقطه مزدوج همزاویهٔ نقطهٔ اول نسبت به مثلث مفروض است.

فرض کنید (L) دایرهٔ محیطی مثلث پایی XYZ برای نقطهٔ M نسبت‌به مثلث ABC باشد. اگر $X'Y'Z'$ مثلث پایی نقطهٔ M' (مزدوج همزاویهٔ M برای مثلث ABC) نسبت به مثلث ABC باشد، شش نقطهٔ X، Y، Z، X'،Y' ، و Z' روی یک دایره (§۶۴۱) منطبق بر (L) قرار دارند، زیرا دو دایره در سه نقطهٔ X، Y، و Z مشترک‌اند. به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

۶۴۴. قضیه. اگر دو نقطه نسبت به یک مثلث همزاویه باشند، آن گاه هر کدام مرکز دایره‌ای هستند که از متقارنهای نقطهٔ دیگر نسبت به اضلاع مثلث می‌گذرد.

فرض کنید D، E، و F تصاویر نقطهٔ M بر اضلاع مثلث ABC، و D'، E'، و F' متقارنهای M نسبت به اضلاع مثلث ABC باشند.

نقطهٔ M مرکز تجانس دو مثلث DEF و $D'E'F'$ است، و نسبت تجانس ۲ : ۱ است؛ پس اگر L و L' مراکز دایره‌های محیطی DEF و $D'E'F'$ باشند، داریم $ML : ML' = ۱ : ۲$، یعنی L' متقارن M نسبت به L است، پس L' بر مزدوج همزاویهٔ M نسبت به ABC، یعنی نقطهٔ M'، منطبق است (§۶۴۱).

۶۴۵. قضیه. دایرهٔ مفروضی روی اضلاع یک مثلث سه پاره‌خط جدا می‌کند؛ مرکز اصلی سه دایره‌ای که این سه پاره‌خط قطرشان هستند، مزدوج همزاویهٔ مرکز دایرهٔ مفروض نسبت به مثلث است.

فرض کنید D، E، و F نقاط وسط پاره‌خطهایی باشند که دایرهٔ مفروض (M) روی اضلاع BC، CA و AB از مثلث ABC جدا کرده است، و (D)، (E)، (F) دایره‌هایی باشند که پاره‌خطهای جدا شده قطرشان هستند.

خطوط AB و AC محورهای اصلی دایره‌های (M)، (F) و (M)، (E) هستند؛ پس نقطهٔ A روی محور اصلی دایره‌های (E) و (F) قرار دارد (§۴۲۵). پس محور اصلی (E) و (F) عمودی است که از A بر ضلع EF مثلث پایی DEF برای نقطهٔ M نسبت به ABC رسم می‌شود. مطلب مشابهی برای محورهای اصلی (F)، (D) و (D)، (E) صادق است. به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود (§۶۳۷).

۶۴۶. قضیه. اگر دو نقطهٔ مزدوج همزاویه نسبت به یک مثلث با مرکز دایرهٔ محیطی مثلث همخط باشند، آن‌گاه دایرهٔ پایی آنها بر دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث مماس است.

اگر X و Y دو انتهای یک قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند، آن‌گاه x و y، یعنی خطهای سیمسون X و Y، بر هم عمودند و نقطهٔ $L = xy$ روی دایرهٔ نه نقطهٔ (N) برای مثلث ABC قرار دارد (§۲۹۵). تصاویر دو نقطهٔ X و Y بر روی BC، یعنی X' و Y'، به ترتیب روی x و y قرار دارند و نسبت به A'، نقطهٔ وسط BC، متقارن‌اند؛ پس دایرهٔ $(X'Y')$ که $X'Y'$ قطر آن‌است از L می‌گذرد.

P و P' را دو نقطهٔ دلخواه قطر XY، و D و D' را تصاویر آنها بر ضلع BC فرض کنید. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، داریم

$$A'D : A'X' = OP : R\,,\ A'D' : A'X' = OP' : R$$

پس با ضرب کردن این روابط در یکدیگر به دست می‌آوریم

$$A'D \cdot A'D' : A'X'^{۲} = OP \cdot OP' : R^{۲}$$

یا، چون L روی $(X'Y')$ قرار دارد،

$$A'D \cdot A'D' : A'L^{۲} = OP \cdot OP' : R^{۲}$$

طرف راست این تناسب به ضلع BC بستگی ندارد؛ به نقطهٔ $L = xy$ نیز بستگی ندارد؛ پس اگر نقاط وسط AC و AB را B' و C'، و تصاویر نقاط P و P' بر این اضلاع را E، E' و F، F' بنامیم، خواهیم داشت

$$A'D \cdot A'D' : A'L^{۲} = B'E \cdot B'E' : B'L^{۲} = C'F \cdot C'F' : C'L^{۲} \qquad \text{(a)}$$

حال فرض کنید که P و P' برای ABC مزدوج همزاویه باشند. شش تصویر D، D'، ⋯ برای نقاط P، P' روی یک دایرهٔ (S) قرار دارند (§۶۴۱)، و حاصل‌ضربهای $A'D \cdot A'D'$، ⋯ قوتهای نقاط A'، B'، C' برای (S) هستند. اگر $A'L^{۲}$، ⋯ را قوتهای نقاط A'، B'، C' نسبت به دایرهٔ نقطه‌ای (L) در نظر بگیریم،

از رابطهٔ (a) نتیجه می‌شود که دایرهٔ (N) با دایره‌های (S) و (L) هم‌محور است (§۴۷۵)؛ پس نقاط N، مرکز (N)، L و S، مرکز (S)، همخط‌اند. به علاوه چون نقطهٔ L روی (N) قرار دارد؛ محور اصلی این دسته دایرهٔ هم‌محور در L بر (N) مماس است؛ پس دایرهٔ (S) نیز از L می‌گذرد و بنابراین، در L بر (N) مماس است.

۶۴۷. نتیجه. اگر نقاط P و P' در یک مرکز سه مماس مثلث ABC بر هم منطبق باشند (§۶۳۴)، دایرهٔ (S) همان دایرهٔ سه مماس خواهد بود؛ پس، هر دایرهٔ سه مماس یک مثلث بر دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث مماس است.

این همان قضیهٔ فوئرباخ است (§۲۱۵).

۶۴۸. ملاحظه. از اثبات قضیهٔ قبل (§۶۴۴)، نتیجه می‌شود که نقطهٔ فوئرباخ (§۲۱۴، §۲۱۵) نسبت به یک دایرهٔ سه مماس مفروض، نقطهٔ برخورد خطوط سیمسون دو انتهای قطری از دایرهٔ محیطی است، که از مرکز سه مماس متناظر می‌گذرد. پس نقاط فوئرباخ را می‌توان بدون استفاده از دایرهٔ نه نقطه یا دایره‌های سه مماس تعیین کرد.

تمرین

۱) دو نقطهٔ همزاویه برای یک مثلث مفروض‌اند. نشان دهید که حاصل‌ضرب فاصله‌های آنها از هر ضلع مثلث مقداری ثابت است.

۲) نشان دهید که مجموع زاویه‌هایی که یک ضلع مثلث با آنها از دو نقطهٔ همزاویه دیده می‌شود، به اندازهٔ زاویهٔ روبروی آن ضلع از زاویهٔ نیم صفحه (۱۸۰°) بیشتر است.

۳) نشان دهید که رأسهای مثلث مماسی یک مثلث، مزدوجهای همزاویهٔ رأسهای مثلث پادمکمل آن مثلث هستند.

۴) از هر رأس مثلث خطی به تصویر مرکز دایرهٔ محیطی بر روی عمودمنصف ضلع مقابل رسم می‌کنیم. نشان دهید که این سه خط همرس‌اند (نقطه همرسی مزدوج همنوای نقطهٔ ژرگون مثلث است).

۵) متقارنهای یک دایره نسبت به سه ضلع یک مثلث را به دست می‌آوریم. نشان دهید که مرکز اصلی این سه دایره، مزدوج همزاویهٔ مرکز دایرهٔ مفروض نسبت به آن مثلث است.

ه. هندسه بروکار

I. نقاط بروکار

۶۴۹. تعریف. دایرهٔ (AB) را که از رأسهای A و B از مثلث ABC می‌گذرد و در B بر ضلع BC مماس است (شکل ۱۴۷) در نظر بگیرید. همچنین می‌توان دایرهٔ (BC) را که از B و C می‌گذرد و در C بر AC مماس است، و دایرهٔ (CA) را که از C و A می‌گذرد و در A بر AB مماس است در نظر گرفت. این دایره‌ها را گروه مستقیم دایره‌های الحاقی می‌نامیم.

اگر رأسهای A، B، C را دوتا دوتا در جایگشت دایره‌ای BAC در نظر بگیریم، گروه غیر مستقیم دایره‌های الحاقی (BA)، (AC) و (CB) را به دست می‌آوریم. دایرهٔ (BA) دایره‌ای است که از A و B می‌گذرد و در A بر ضلع AC مماس است؛ برای دو دایره دیگر نیز تعریف مشابهی وجود دارد.

۶۵۰. قضیه. سه دایرهٔ الحاقی گروه مستقیم یک نقطهٔ مشترک دارند.

دو دایرهٔ (AB) و (BC) در نقطهٔ B مشترک‌اند (شکل ۱۴۷)؛ پس در نقطهٔ دیگری داخل مثلث ABC نیز مشترک‌اند که آن‌را M می‌نامیم. دایرهٔ (AB) در B بر BC مماس است، پس $\angle AMB = ۱۸۰^\circ - B$ و همچنین $\angle BMC = ۱۸۰^\circ - C$؛ پس،

$$\angle AMC = ۳۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - B) - (۱۸۰^\circ - C) = B + C = ۱۸۰^\circ - A$$

شکل۱۴۷

پس نقطهٔ M روی کمانی از دایرهٔ (AC) که داخل ABC است قرار دارد؛ و اثبات قضیه کامل می‌شود.

۶۵۱. قضیه. سه دایرهٔ الحاقی گروه غیر مستقیم یک نقطهٔ مشترک، مانند N دارند.

اثبات شبیه اثبات قضیه قبل (۶۵۰§) است.

۶۵۲. تعریف. دو نقطهٔ M و N (۶۵۰§، ۶۵۱§) را نقاط بروکار مثلث می‌نامند. این نقاط را معمولاً با Ω و Ω' نشان می‌دهند.

۶۵۳. قضیه. (الف) $\angle MAB = \angle MBC = \angle MCA$، و نقطهٔ M تنها نقطه‌ای است که این ویژگی را دارد.

(ب) $\angle NAC = \angle NCB = \angle NBA$، و نقطهٔ N تنها نقطه‌ای است که این ویژگی را دارد (شکل ۱۴۷).

زاویهٔ MAB در دایرهٔ (AB) محاط است و برابر نصف $\widehat{BM}$ است؛ $\angle MBC$ که از وتر BM و مماس BC تشکیل می‌شود نیز نصف $\widehat{BM}$ است؛ پس این دو زاویه برابرند. به همین ترتیب $\angle MBC$ با $\angle MCA$ برابر است.

حال اگر M' نقطهٔ دیگری باشد، به‌طوری که $\angle M'AB = \angle M'BC$، آنگاه دایره‌ای که از M'، A، و B می‌گذرد بر BC در B مماس است، یعنی M' نقطه‌ای از دایرهٔ (AB) است. به‌طور مشابه، برای اینکه داشته باشیم $\angle M'BC = \angle M'CA$، نقطهٔ M' باید روی (BC) باشد؛ پس M' بر M منطبق است. قسمت (ب) هم به همین ترتیب ثابت می‌شود.

۶۵۴. قضیه. نقاط بروکار دو نقطهٔ همزاویهٔ مثلث هستند.

اگر N' مزدوج همزاویهٔ نقطهٔ بروکار M باشد (شکل ۱۴۷)، آنگاه داریم

$$\angle MAB = \angle N'AC\ ,\ \angle MBC = \angle N'BA\ ,\ \angle MCA = \angle N'CB$$

و چون

$$\angle MAB = \angle MBC = \angle MCA$$

پس،

$$\angle N'AC = \angle N'BA = \angle N'CB$$

یعنی N' بر N منطبق است (§۶۵۳).

۶۵۵. تعریف. زاویهٔ MAB را که برابر زاویهٔ NAC نیز هست (§۶۵۴)، زاویهٔ بروکار مثلث می‌نامند و معمولاً آن را با ω نشان می‌دهند.

۶۵۶. ترسیم. مثلث ABC (شکل ۱۴۸) و یک دایرهٔ گروه مستقیم دایره‌های الحاقی، مثلاً (CA)، مفروض‌اند. نقطهٔ بروکار M و زاویهٔ بروکار را می‌توان به صورت زیر ترسیم کرد.

از نقطهٔ تماس A در دایرهٔ (CA) خطی موازی با ضلع BC رسم می‌کنیم، تا (CA) را در I قطع کند. خط BI که از I به‌رأس سوم مثلث، یعنی B وصل می‌شود، دایرهٔ (CA) را در نقطهٔ مطلوب M قطع می‌کند، و $\angle IBC$ زاویهٔ بروکار مثلث ABC است.

در واقع، داریم

$$\angle MAB = \angle MCA = \angle MIA = \angle MBC$$

نقطه بروکار دوم نیز به‌طور مشابه رسم می‌شود.

۶۵۷. ملاحظهٔ ۱. در مثلثهای ACI و ACB (شکل ۱۴۸) داریم $\angle AIC = \angle BAC$ و $\angle IAC = \angle ACB$؛ پس $\angle ACI = \angle ABC$؛ یعنی خط CI بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC، یعنی دایرهٔ (O)، مماس است. پس برای تعیین نقطهٔ I می‌توان AI را موازی با BC، و CI را مماس بر دایرهٔ محیطی (O) در C رسم کرد. پس نقطهٔ بروکار را می‌توان بدون استفاده از دایرهٔ الحاقی تعیین کرد؛ با دو بار تکرار این ترسیم نقطهٔ بروکار تعیین می‌شود.

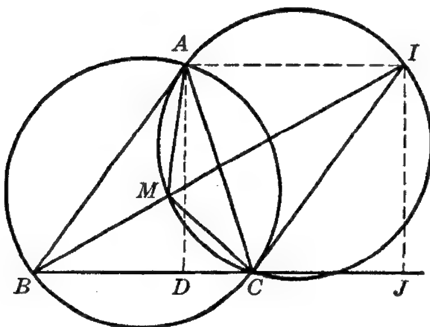
۶۵۸. ملاحظهٔ ۲. فرض کنید D و J پای ارتفاعهایی باشند که از A و I بر BC رسم می‌شود (شکل ۱۴۸). داریم

$$\frac{BJ}{IJ} = \frac{BD}{IJ} + \frac{DC}{IJ} + \frac{CJ}{IJ} = \frac{CJ}{IJ} + \frac{BD}{AD} + \frac{DC}{AD}$$

یا

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$$

۶۵۹. قضیه. یک زاویهٔ مثلث و یکی از زاویه‌های بروکار آن، شکل مثلث را تعیین می‌کنند.



شکل ۱۴۸

از رأس A از زاویهٔ مفروض BAC (شکل ۱۴۸) و از نقطهٔ دلخواه C بر روی ضلع AC از زاویهٔ BAC دو خط AM و CM را در داخل زاویه رسم می‌کنیم، به طوری که به ترتیب بااضلاع AB و AC زاویه‌ای برابر زاویه بروکار ω بسازند و یکدیگر را در M قطع کنند. اگر B نقطه‌ای روی ضلع AB از زاویهٔ مفروض باشد، به طوری که پاره‌خط CM از آن با زاویهٔ ω دیده شود، مثلث ABC دارای زاویهٔ مفروض A و زاویهٔ بروکار ω خواهد بود.

در حالت کلی روی خط AB دو نقطهٔ B و B' وجود دارند که از آنها پاره‌خط CM با زاویهٔ ω دیده می‌شود. دو مثلث ABC و $AB'C$ با هم به‌طور معکوس متشابه‌اند.

۶۶۰. مسئله. مثلثی را با مفروض بودن یک ضلع، یک زاویه، و زاویهٔ بروکار رسم کنید.

دو زاویهٔ مفروض مثلثی متشابه با مثلث مطلوب را تعیین می‌کنند (§۶۵۹)؛ سپس به سادگی می‌توان مثلث مطلوب را کامل کرد.

۶۶۱. قضیه. نقاط برخورد دایرهٔ محیطی یک مثلث با خطوطی که از رأسهای مثلث به یک نقطهٔ بروکار رسم می‌شوند، رأسهای مثلثی همنهشت بامثلث مفروض هستند.

فرض کنید خطوط $A\Omega$، $B\Omega$ و $C\Omega$ دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC را در A'، B'، C' و A' قطع کنند. در مثلث $A'B'C'$ (شکل ۱۴۹) داریم

$$\angle A' = \angle B'A'C + \angle C'A'C = \angle B'AC + \angle C'BC = \angle B'AC + \angle BAB' = \angle A$$

برای زاویه‌های B' و C' نیز مطلب مشابهی صادق است. پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند و در یک دایره محاط‌اند؛ پس با هم همنهشت‌اند.

برای نقطهٔ بروکار دوم نیز وضعیت مشابهی برقرار است.

توجه کنید که مثلث $A'B'C'$ را می‌توان از مثلث ABC، با دورانی حول مرکز دایرهٔ محیطی O برابر زاویهٔ 2ω در جهت پادساعتگرد به دست آورد، زیرا

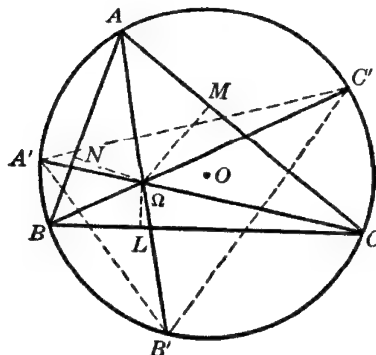
$$\angle AOA' = 2\angle ACA' = 2\omega$$

۶۶۲. ملاحظه. نقطهٔ Ω نقطهٔ بروکار دوم مثلث $A'B'C'$ است، زیرا

$$\angle \Omega A'C' = \angle CA'C' = \angle CBC' = \omega$$

به طور مشابه،

$$\angle \Omega C'B' = \angle BC'B' = \angle BAB' = \omega$$



شکل۱۴۹

۶۶۳. نتیجه. دو نقطهٔ بروکار یک مثلث از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث همفاصله‌اند.

در دو مثلث همنهشت ABC و $A'B'C'$، نقطهٔ Ω از مثلث $A'B'C'$ با نقطهٔ Ω' از مثلث ABC متناظر است، پس دو نقطهٔ Ω و Ω' از مرکز مشترک دایرهٔ محیطی‌شان همفاصله‌اند.

۶۶۴. قضیه. مثلث پایی یک نقطهٔ بروکار با مثلث مفروض متشابه است.

فرض کنید L، M، و N تصاویر نقطهٔ بروکار Ω بر اضلاع BC، CA و AB از مثلث ABC (شکل ۱۴۹) باشند. با توجه به تعریف نقطهٔ بروکار و دو چهارضلعی محاطی ΩMAN و ΩNBL، به ترتیب خواهیم داشت

$$\angle A = \angle \Omega AN + \angle \Omega AM = \angle \Omega BL + \angle \Omega AM = \angle \Omega NL + \angle \Omega AM$$
$$= \angle \Omega NL + \angle \Omega NM = \angle MNL$$

و به طور مشابه، زاویه‌های دیگر متناظر در مثلثهای ABC و MNL با یکدیگر برابرند.

برای Ω' نیز همین‌طور است.

۶۶۵. نتیجه. مثلثهای پایی دو نقطهٔ بروکار همنهشت‌اند.

زیرا متشابه‌اند (§۶۶۴) و در یک دایره محاط‌اند (§۶۵۴).

تمرین

۱) نشان دهید که مثلثهای پادپایی نقاط بروکار با مثلث مفروض متشابه‌اند.

۲) از مثلثی راستای دو ضلع و محل یک نقطهٔ بروکار مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۳) نشان دهید که: (الف) مثلثهای ΩCA و $\Omega' BA$ متشابه‌اند (دیگر مثلثهای متشابه را نیز نام ببرید)؛ (ب) $A\Omega : A\Omega' = b : c$ (دو رابطهٔ مشابه دیگر را بیان کنید)؛ (ج) $B\Omega \cdot C\Omega' = C\Omega \cdot A\Omega' = A\Omega \cdot B\Omega'$؛ (د) $c \cdot C\Omega = b \cdot B\Omega'$ (دو رابطهٔ مشابه دیگر را بیان کنید)؛ (هـ) $A\Omega : B\Omega : C\Omega = (b : a) : (c : b) : (a : c)$، و به طور مشابه برای Ω'.

۴) خطوطی که از نقاط بروکار مثلث ABC به رأسهای آن وصل می‌شوند، دایرهٔ محیطی را در A'، A''، B'، B''، C' و C'' قطع می‌کنند، و K، K' و K'' نقاط لوموان مثلثهای ABC، $A'B'C'$ و $A''B''C''$ هستند. ثابت کنید که خطوط KK' و KK'' هر کدام از یک نقطهٔ بروکار مثلث ABC می‌گذرند.

II. دایرهٔ بروکار

۶۶۶. تعریف. دایرهٔ (OK) که پاره‌خط واصل بین مرکز دایرهٔ محیطی O و نقطهٔ لوموان K از مثلث ABC قطر آن است، دایرهٔ بروکار ABC نامیده می‌شود (شکل ۱۵۰).

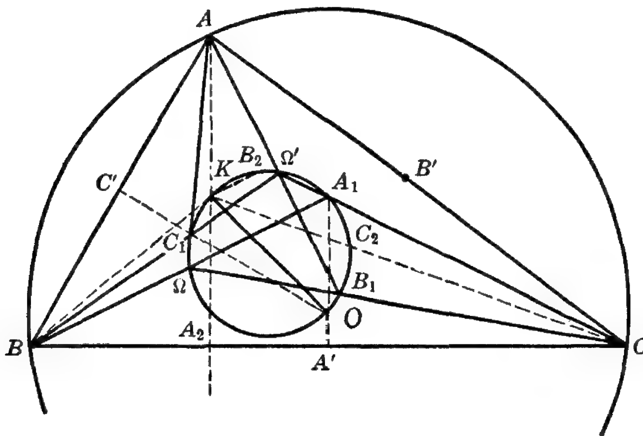
عمودمنصفهای اضلاع BC، CA و AB دایرهٔ بروکار (OK) را در رأسهای A_1، B_1، و C_1 از مثلث اول بروکار برای مثلث ABC قطع می‌کنند.

میانه‌های AK، BK، و CK از مثلث ABC دایرهٔ (OK) را در A_2، B_2 و C_2 قطع می‌کنند، که مثلث $A_2B_2C_2$ مثلث دوم بروکار برای مثلث ABC است.

۶۶۷. قضیه. نقاط بروکار یک مثلث روی دایرهٔ بروکار آن مثلث قرار دارد.

زاویهٔ KA_1O قائمه است (شکل ۱۵۰)؛ پس KA_1 با BC موازی است و در نتیجه A_1A' با فاصلهٔ K از BC برابر است. پس (§۵۷۴)،

$$A_1A' : BC = B_1B' : CA = C_1C' : AB \qquad (1)$$



شکل ۱۵۰

حال نشان می‌دهیم که نقطهٔ برخورد AC_1 با BA_1، یعنی نقطهٔ P، روی دایرهٔ (OK) قرار دارد.
از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که دو مثلث متساوی‌الساقین ABC_1 و BCA_1 متشابه‌اند؛ پس

$$\angle BA_1A' = \angle A\ C_1C' = \angle PC_1O$$

پس نقاط A_1 و C_1 با O و P همدایره‌اند؛ پس P روی (OK) قرار دارد. باز با در نظر گرفتن مثلثهای BCA_1 و CAB_1 می‌توان نشان داد که A_1B و B_1C روی (OK) یکدیگر را قطع می‌کنند. پس سه خط A_1B، B_1C، و C_1A در نقطهٔ P، روی دایره (OK) یکدیگر را قطع می‌کنند. اکنون با توجه به تشابه سه مثلث متساوی‌الساقین A_1BC، B_1CA، و C_1AB داریم

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$$

پس P بر نقطهٔ بروکار Ω منطبق است.

به طور مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که سه خط B_1A، A_1C، و C_1B روی (OK) و در نقطهٔ دوم بروکار Ω' یکدیگر را قطع می‌کنند.

۶۶۸. ملاحظه. با توجه به سه مثلث متساوی‌الساقین متشابه در نظر گرفته شده (§۶۶۷)، داریم

$$AC_1 : AB_1 = c : b\ ,\ BA_1 : BC_1 = a : c\ ,\ CA_1 : CB_1 = a : b$$

۶۶۹. قضیه. دایرهٔ بروکار با دایرهٔ اول لوموان مثلث هم‌مرکز است.

در واقع، مرکز هر دو دایره نقطهٔ وسط پاره‌خط بین مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ لوموان مثلث است (§۵۹۰، §۶۶۶).

۶۷۰. قضیه. (الف) دایرهٔ بروکار یک مثلث بر دایره‌های آپولونیوسی آن عمود است.

(ب) محور اصلی دایرهٔ بروکار و دایرهٔ محیطی بر محور لوموان مثلث منطبق است.

(الف) نقطهٔ لوموان K مزدوج مرکز دایرهٔ محیطی O، نسبت به هر یک از دایره‌های آپولونیوسی مثلث است (§۶۰۸)؛ پس قضیه برقرار است (§۳۸۷، §۶۶۶).

(ب) دایرهٔ بروکار (OK) و دایرهٔ محیطی (O) هر دو بر دایره‌های آپولونیوسی مثلث عمودند (§۵۹۹)؛

پس (OK) و (O) یک دسته دایرهٔ (U) را مزدوج با دسته دایرهٔ (W)، متشکل از دایره‌های آپولونیوسی، تشکیل می‌دهند (§۴۵۶). پس خط مرکزی (W)، یعنی محور لوموان (§۶۰۰)، محور اصلی U است (§۴۵۵)، پس اثبات کامل می‌شود.

۶۷۱. قضیه. دایرهٔ بروکار بر محور اصلی دو دایرهٔ لوموان مماس است.

خط‌المرکزین دو دایرهٔ لوموان روی قطر بروکار مثلث قرار دارد، و محور اصلی این دو دایره از نقطهٔ لوموان مثلث می‌گذرد (§۵۹۶)، پس قضیه برقرار است.

۶۷۲. قضیه. خطوطی که رأسهای یک مثلث را به رأسهای متناظر دایرهٔ اول بروکار وصل می‌کنند، یکدیگر را در نقطهٔ همنوای نقطهٔ لوموان نسبت به مثلث، قطع می‌کنند.

خط A_1OA' (شکل ۱۵۰) از قطب U برای ضلع BC نسبت به دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC می‌گذرد؛ میانهٔ متقارن AK نیز همین‌طور است (§۵۶۰). اگر K' نقطهٔ برخورد AK و BC باشد، خط KA_1 موازی با شعاع $A'K'$ از دسته خط همساز $A'(AK'KU)$، خط $A'A$ را در نقطهٔ وسط پاره‌خط KA_1 قطع می‌کند، یعنی خطوط AA_1 و AK همنوا هستند. برای دو خط BB_1 و BK، و همچنین دو خط CC_1 و CK نیز مطلب مشابهی صادق است، پس قضیه برقرار است.

۶۷۳. ملاحظه. مثلث اول بروکار با مثلث اصلی به سه طریق منظری است، و مراکز منظری دو نقطهٔ بروکار (§۶۶۷) و نقطهٔ همنوای نقطهٔ لوموان هستند (§۶۷۲).

۶۷۴. قضیه. مثلث اول بروکار متشابه معکوس مثلث مفروض است.

در واقع داریم (شکل ۱۵۰)

$$\angle A = \angle B_1KC_1 = \angle B_1A_1C_1$$

زیرا اضلاع این زاویه‌ها موازی‌اند؛ برای دو زاویهٔ دیگر مثلثها نیز چنین است.

۶۷۵. قضیه. مرکز ثقل یک مثلث، مرکز ثقل مثلث اول بروکار نیز هست.

فرض کنید X متقارن A_1 نسبت به BC باشد (شکل ۱۵۰). به آسانی می‌توان دید که $\angle C_1BX = \angle B$ و داریم (§۶۶۸)

$$BC_1 : BX = BC_1 : BA_1 = c : a$$

پس مثلثهای BC_1X و ABC متشابه‌اند. به طور مشابه، می‌توان نشان داد که مثلث CB_1X با ABC متشابه است. پس دو مثلث BC_1X و CB_1X متشابه‌اند. ولی $BX = CX$؛ پس دو مثلث همنهشت‌اند، و داریم

$$B_1X = BC_1 = AC_1 \text{ و } C_1X = CB_1 = AB_1$$

پس AC_1XB_1 متوازی‌الاضلاع است. فرض کنید U نقطهٔ برخورد قطرهای B_1C_1 و AX از این متوازی‌الاضلاع باشد. خطوط AA' و A_1U میانه‌های مثلث AA_1X هستند؛ پس یکدیگر را در نقطهٔ G، به نسبت یک سوم و دو سوم قطع می‌کنند. از طرف دیگر خطوط AA' و A_1U به ترتیب میانه‌های مثلث ABC و مثلث $A_1B_1C_1$ هستند؛ پس G مرکز ثقل هر دو مثلث است.

۶۷۶. قضیه. مثلثی را با مفروض بودن محل مثلث اول بروکار آن، رسم کنید.

مثلث مطلوب ABC و مثلث اول بروکار $A_1B_1C_1$ متشابه معکوس هستند (§۶۷۴) و مثلث اول بروکار مثلث $A_1B_1C_1$، که آن‌را مثلث $A'B'C'$ می‌نامیم، متشابه معکوس این مثلث است؛ پس دو مثلث ABC و

$A'B'C'$ مستقیماً متشابه‌اند. به‌علاوه، زاویه‌های $(B_1C_1, B'C')$ و (B_1C_1, BC) برابرند؛ پس خطوط BC و $B'C'$ موازی‌اند. یعنی مثلثهای ABC و $A'B'C'$ متجانس‌اند.

مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ مرکز ثقل یکسانی دارند (§۶۷۵)، همین‌طور مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A'B'C'$؛ پس مرکز ثقل G در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ یکسان است و بنابراین، مرکز تجانس آنهانیز هست. به علاوه، داریم

$$GA' : GA_1 = GA_1 : GA$$

پس پاره‌خط GA را می‌توان رسم و نقطهٔ A را روی خط GA' مشخص کرد. نقاط B و C را می‌توان به عنوان نقاط متناظر B' و C' در تجانس $(G, GA : GA')$ تعیین کرد.

۶۷۷. قضیه. عمودهایی که از وسط اضلاع مثلث اول بروکار بر اضلاع متناظر مثلث مفروض رسم می‌شوند، یکدیگر را در مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث مفروض قطع می‌کنند.

عمودهایی که از وسط اضلاع مثلث $A_1B_1C_1$ (شکل ۱۵۰) بر اضلاع ABC رسم می‌شوند، با خطوط OA_1، OB_1 و OC_1 موازی‌اند؛ پس این عمودها یکدیگر را در نقطهٔ مکمل O برای مثلث $A_1B_1C_1$ قطع می‌کنند، یعنی در نقطهٔ O' که برای آن داریم $GO' : GO = -1:2$، که G مرکز ثقل $A_1B_1C_1$ است. G مرکز ثقل مثلث ABC نیز هست (§۶۷۵)؛ پس O' مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC است.

۶۷۸. قضیه. خطوطی که از رأسهای یک مثلث به موازات اضلاع متناظر مثلث اول بروکار رسم می‌شوند، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث مفروض قطع می‌کنند.

فرض کنید خطوطی که از رأسهای B و C در مثلث ABC به موازات اضلاع A_1C_1 و A_1B_1 از مثلث اول بروکار $A_1B_1C_1$ رسم می‌شوند (شکل ۱۵۰) یکدیگر را در R قطع کنند؛ در این‌صورت داریم

$$\angle BRC = \angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$$

پس R روی دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC قرار دارد، و R و A در یک طرف ضلع BC قرار دارند.

پس می‌بینیم که خط BR، خطوطی را که از C و A به موازات اضلاع متناظر مثلث $A_1B_1C_1$ رسم می‌شوند، در نقطهٔ R واقع بر (O) قطع می‌کند.

۶۷۹. تعریف. نقطهٔ R(§۶۷۸) را نقطهٔ اشتاینر مثلث می‌نامند.

۶۸۰. نتیجه. خطوطی که از رأسهای یک مثلث بر اضلاع متناظر مثلث اول بروکار عمود می‌شوند، از یک نقطه می‌گذرند.

در واقع این عمودها از نقطهٔ N، روبروی قطری R در دایرهٔ (O)، می‌گذرند.

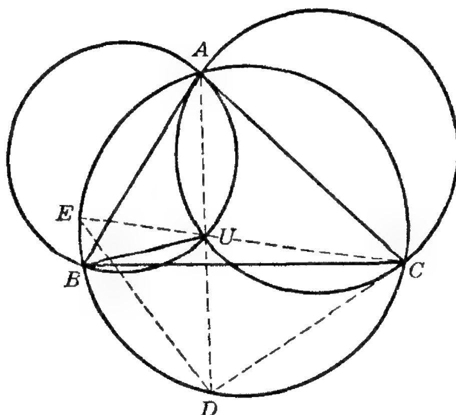
۶۸۱. تعریف. نقطهٔ N(§۶۸۰) را نقطهٔ تاری مثلث مفروض می‌نامند.

۶۸۲. قضیه. دایرهٔ محیطی مثلث روی میانه‌های متقارن (امتداد داده شده) مثلث پاره‌خطهایی جدا می‌کند، که نقاط وسط آنها رأسهای مثلث دوم بروکار هستند.

زاویهٔ OA_2K که در دایرهٔ (OK) محاط است (شکل ۱۵۰) قائمه است؛ پس OA_2 عمودی است که از مرکز دایرهٔ محیطی O بر میانهٔ متقارن AK از مثلث ABC رسم شده است؛ و قضیه ثابت می‌شود.

۶۸۳. قضیه. دایره‌های الحاقی مستقیم و غیرمستقیم مماس بر اضلاع یک زاویهٔ مثلث، یکدیگر را در رأس متناظر مثلث دوم بروکار قطع می‌کنند.

فرض کنید U نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ الحاقی (CA) و (BA) از مثلث ABC باشد (شکل ۱۵۱) و



شکل۱۵۱

خطوط AU و CU دایرهٔ محیطی (O) را در D و E قطع کنند. داریم

$$\angle UAB = \angle ACU = \angle ACE = \angle ADE \qquad (۱)$$

$$\angle UBA = \angle CAU = \angle CAD = \angle CED$$

پس سه مثلث UAB، UAC و UDE متشابه‌اند. پس

$$\angle BCA = \angle ECD \quad \text{و} \quad \angle BAD = \angle BCD$$

یعنی وترهای AB و DE برابرند، و در نتیجه مثلثهای UAB و UDE همنهشت‌اند، و $AU = UD$.

در مثلثهای متشابه UAB و UAC ارتفاعهای رسم شده از U با اضلاع AB و AC متناسب‌اند؛ پس U نقطه‌ای از میانهٔ متقارن گذرنده از A در مثلث ABC است (§۵۶۷). پس قضیه ثابت می‌شود.

تمرین

۱) نشان دهید خط قطبی مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث نسبت به دایرهٔ دوم لوموان، محور اصلی این دایره و دایرهٔ بروکار است.

۲) نشان دهید که خطوط واصل بین رأسهای یک مثلث و رأسهای متناظر مثلث اول بروکار اضلاع متناظر مثلث مفروض را به نسبت عکس مربع دو ضلع تقسیم می‌کنند.

۳) نشان دهید محور لوموان و دایرهٔ بروکار نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث منعکس یکدیگرند.

۴) نشان دهید پاره‌خطهای واصل بین نقطهٔ لوموان و رأسهای مثلث اول بروکار توسط میانه‌های متناظر مثلث مفروض نصف می‌شوند.

۵) نشان دهید در هر مثلث خطی که از نقطهٔ لوموان K به مرکز دایرهٔ نه نقطه O'، وصل می‌شود از مرکز دایرهٔ بروکار مثلث پادمکمل، Z'، می‌گذرد و $KO' = O'Z'$.

۶) نشان دهید که مرکز دایرهٔ محیطی O در مثلث ABC، نقطهٔ لوموان K_1 مثلث میانک $A_1B_1C_1$ و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث پادمکمل $A'B'C'$، نقطهٔ Z'، همخط‌اند، و $OK_1 = K_1Z'$.

۷) نشان دهید که نقطهٔ لوموان و مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث، نقطهٔ اشتاینر و نقطهٔ تاری مثلث اول بروکار هستند.

۸) نشان دهید که خط سیمسون یک نقطهٔ برخورد قطر بروکار و دایرهٔ محیطی مثلث، با نیمساز زاویهٔ متشکل از یک ضلع مثلث و ضلع متناظر مثلث اول بروکار یا موازی است یا بر آن عمود است.

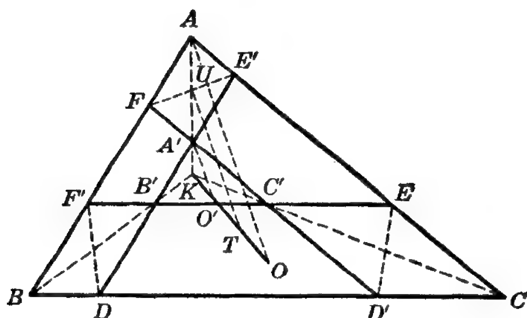
و. دایره‌های تاکر

۶۸۴. نقاط همدایره. مثلث $A'B'C'$ را متجانس مستقیم مثلث ABC، به مرکز تجانس نقطهٔ لوموان K در مثلث ABC رسم می‌کنیم (شکل ۱۵۲). فرض کنید اضلاع $B'C'$، $C'A'$ و $A'B'$ اضلاع AC و AB، BA و CB، BC و CA را به ترتیب در نقاط E و F'، F و D'، D و E' قطع کنند.

قضیه. شش نقطهٔ D، E، F، D'، E'، و F' همدایره‌اند.

قطر $E'F$ از متوازی‌الاضلاع $AE'A'F$ در نقطهٔ U توسط قطر AA' نصف می‌شود، یعنی توسط میانهٔ متقارن $AA'K$ از مثلث ABC؛ پس $E'F$ با BC پادموازی است. به‌طور مشابه، $F'D$ با AC و $D'E$ با AB پادموازی است.

دو خط موازی DD' و EF' و دو خط پادموازی DF'، $D'E$ برای اضلاع AC و AB، یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین تشکیل می‌دهند؛ پس نقاط D، D' و E، و F' روی یک دایره‌اند. به‌طور مشابه، نقاط E، E'، F و D' روی یک دایره‌اند؛ نقاط F، F'، D، و E' نیز روی یک دایره‌اند. این دایره‌ها نمی‌توانند مجزا باشند، زیرا در این صورت محورهای اصلی آنها خطوط ED'، FE' و DF' هستند که یک مثلث تشکیل می‌دهند، حال آنکه محورهای اصلی سه دایرهٔ مجزا همرس‌اند (۴۲۵§)؛ پس حداقل دو دایره از این سه دایره بر هم منطبق‌اند، و قضیه ثابت می‌شود.



شکل۱۵۲

۶۸۵. تعریف. این دایره (۶۸۴§) دایرهٔ تاکر مثلث نامیده می‌شود.

نسبت تجانس مثلثهای ABC و $A'B'C'$ را به دلخواه می‌توان برگزید؛ پس مثلث ABC بی‌نهایت دایرهٔ تاکر دارد.

اگر یکی از رأسهای $A'B'C'$، مثلاً A'، روی میانهٔ متقارن متناظرش AK انتخاب شود، نسبت تجانس تعیین می‌شود. اگر A' همان A باشد، دایرهٔ تاکر متناظر همان دایرهٔ محیطی مثلث ABC خواهد بود. اگر A' همان K باشد، یعنی وقتی پادموازیهای $D'F$، ... از K می‌گذرند، دایرهٔ تاکر بر دایرهٔ اول لوموان مثلث ABC منطبق است.

۶۸۶. قضیه. مراکز دایره‌های تاکر روی قطر بروکار مثلث مفروض قرار دارند.

شعاع $O'A'$ از دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ (شکل ۱۵۲) با شعاع OA از دایرهٔ محیطی مثلث ABC موازی است، و O' با K و O همخط است (۴۷§)؛ پس خط UT که از U، نقطهٔ وسط AA'، به‌موازات OA رسم می‌شود، از T نقطهٔ وسط OO'، می‌گذرد. OA بر $E'F$ عمود است (۱۸۵§، ۱۸۸§)؛ پس UT

عمودمنصف وتر $E'F$ از دایرهٔ تاکر است. به‌طور مشابه، عمودمنصفهای DF' و $D'E$ از T می‌گذرند، و قضیه ثابت می‌شود.

۶۸۷. قضیه. مرکز T دایرهٔ تاکر (T)(§۶۸۶) مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $A''B''C''$ است، که با امتداد دادن خطهای $E'F$، $F'D$، $D'E$ تشکیل می‌شود.

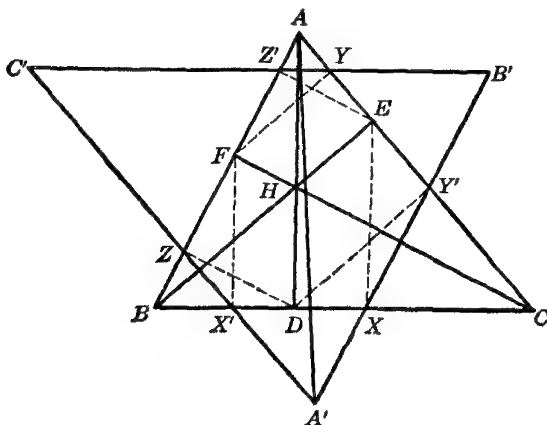
پاره‌خطهای $E'F$، $F'D$، و $D'E$ برابرند (§۶۸۲)؛ بنابراین، این وترهای دایرهٔ تاکر از مرکز T دایره همفاصله‌اند، و قضیه ثابت می‌شود.

۶۸۸. قضیه. مثلث $A''B''C''$ (§۶۸۷) با مثلث مماسی (Q) مثلث ABC متجانس است، و نقطهٔ لوموان ABC مرکز تجانس است.

پادموازیهای $D'E$ و DF' برای اضلاع AB و AC برابرند، پس نقطهٔ برخوردشان، یعنی رأس A'' مثلث $A''B''C''$، روی میانهٔ متقارن AK از مثلث ABC قرار دارد (§۵۶۹). چنین است برای B'' و C''. خطوط $D'E$، $E'F$ و $F'D$ بااضلاع (Q) موازی‌اند، و رأسهای (Q) روی میانه‌های متقارن ABC قرار دارند (§۵۶۰)؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

۶۸۹. قضیه. شش تصویر رأسهای مثلث ارتفاعی بر اضلاع مثلث همدایره‌اند.

فرض کنید H مرکز ارتفاعی و DEF مثلث ارتفاعی ABC باشند (شکل ۱۵۳). فرض کنید X و X' تصاویر E و F بر BC؛ Y' و Y تصاویر D و F بر CA؛ و Z و Z' تصاویر D و E بر AB باشند.



شکل۱۵۳

در مثلث AEF خط YZ' پای ارتفاع EZ' را به پای ارتفاع FY وصل می‌کند؛ پس YZ' با EF پادموازی است، و چون EF با BC پادموازی است، خطوط YZ' و BC موازی‌اند. به‌طور مشابه، ZX' و XY' موازی‌اند. یعنی اگر خطوط YZ'، ZX'، و XY' را امتداد دهیم مثلث $A'B'C'$ متجانس با ABC تشکیل می‌شود.

خط AA' از وسط $Y'Z$ می‌گذرد، زیرا این دو خط قطرهای متوازی‌الاضلاع $AZA'Y'$ هستند. حال با توجه به دو مثلث متشابه $DY'Z$ و HEF نتیجه می‌گیریم که $Y'Z$ با EF موازی، و درنتیجه با BC پادموازی است؛ پس AA' میانهٔ متقارن مثلث ABC است. برای BB' و CC' نیز مشابه این مطلب صادق است.

پس مرکز تجانس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ روی نقطهٔ لوموان K از مثلث قرار دارد؛ پس شش نقطهٔ

X و X'، Y، Y'، Z، و Z' روی یک دایره قرار دارند (§۶۸۴).

۶۹۰. تعریف. این دایره (§۶۸۹) دایرهٔ تیلور مثلث نامیده می‌شود.

از اثبات قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود که دایرهٔ تیلور یکی از دایره‌های تاکر مثلث است.

ز. قطب ارتفاعی

۶۹۱. قضیه. عمودهایی که از تصاویر رأسهای مثلث بر روی یک خط راست، بر اضلاع روبروی آن رأسها رسم می‌شوند همرس‌اند.

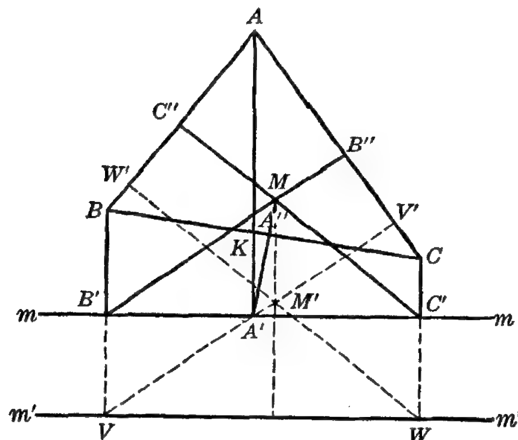
فرض کنید A'، B'، C' (شکل ۱۵۴) تصاویر رأسهای A، B، و C از مثلث مفروض ABC بر خط مفروض m، و $A'A''$، $B'B''$، و $C'C''$ عمودهایی رسم شده بر اضلاع BC، CA و AB باشند. اگر خطوط $B'B''$ و $C'C''$ خط $A'A''$ را در M و N قطع کنند و AA' ضلع BC را در K قطع کند، اضلاع دو مثلث KAC و $A'B'M$ و همچنین، اضلاع دو مثلث KAB و $A'C'N$ بر هم عمودند؛ پس،

$$A'M : A'B' = CK : AK \quad , \quad A'C' : A'N = AK : BK$$

خطوط AA'، BB' و CC' موازی‌اند؛ پس،

$$A'B' : A'C' = BK : CK$$

با ضرب کردن سه تناسب فوق در یکدیگر به دست می‌آوریم $A'M = A'N$؛ پس N و M بر هم منطبق‌اند، و قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۱۵۴

۶۹۲. تعریف. نقطهٔ M(§۶۹۱) قطب ارتفاعی خط m نسبت به مثلث ABC نامیده می‌شود.

۶۹۳. ملاحظه. قطبهای ارتفاعی دو خط موازی روی خط مشترکی عمود بر آن دو خط قرار دارند، و فاصلهٔ بین قطبهای ارتفاعی با فاصلهٔ بین خطوط موازی برابر است.

در واقع، مثلث $M'VW$ (شکل ۱۵۴) را می‌توان از مثلث $MB'C'$، با حرکت دادن رأسهای B' و C' در جهت $B'V$ به اندازهٔ $B'V = C'W$ به دست آورد.

همچنین می‌توان دید که فاصله‌های دو خط m و m' از قطبهای ارتفاعی متناظرشان، M و M'، برابر است.

۶۹۴. قضیه. قطب ارتفاعی یک قطر دایرهٔ محاطی مثلث، بر روی دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث قرار دارد.

فرض کنید عمودهای AA'، BB'، و CC' که از رأسهای مثلث ABC بر قطر d از دایرهٔ محیطی ABC رسم می‌شوند، دایرهٔ محیطی (O) را در نقاط A_1، B_1، C_1 قطع کنند (شکل ۱۵۵). سه عمودی که از A_1، B_1، C_1 بر اضلاع BC، CA، و AB رسم می‌شوند (O) را در نقطهٔ P، یعنی قطب خط سیمسون عمود بر d، قطع می‌کنند (§۲۸۸).

شکل۱۵۵

A' وسط وتر AA_1 از ارتفاع AA_h در مثلث ABC و عمود A_1P از A_1 به BC، همفاصله است؛ پس عمود p از A' به BC در نقطهٔ D پاره‌خط PH را نصف می‌کند، که H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. عمودهای q و r از B' و C' به CA و AB نیز به دلایل مشابه از D می‌گذرند؛ پس نقطهٔ $D = pqr$ قطب ارتفاعی قطر d است. پس D روی دایرهٔ نه نقطهٔ ABC قرار دارد (§۲۹۱)، و قضیه ثابت می‌شود.

باید توجه کرد که ضمناً وجود قطب ارتفاعی قطر d، و بنابراین، قطب ارتفاعی هر خطی (§۶۹۳) را ثابت کرده‌ایم.

۶۹۵. نتیجه. خط s که از D به موازات A_1A رسم می‌شود، یا به عبارت دیگر، بر d عمود است (شکل ۱۵۵)، خط سیمسون نقطهٔ P است (§۲۸۹). قطب ارتفاعی هر خطی موازی با d روی s است (§۶۹۳)؛ پس،قطب ارتفاعی یک خط نسبت به یک مثلث روی خط سیمسون عمود بر آن خط قرار دارد.

۶۹۶. ملاحظه. (الف) قطب ارتفاعی D (شکل ۱۵۵) برای قطر d از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد.

عمودی که از A بر d رسم می‌شود آن‌را در A' و دایرهٔ محیطی را در A_1 قطع می‌کند؛ خط s که از تصویر A_1 بر BC، یعنی نقطهٔ U، به موازات AA_1 رسم می‌شود، عمودی را که از A' بر BC رسم می‌شود در نقطهٔ مطلوب D قطع می‌کند.

(ب) اگر m خط دلخواهی موازی با d باشد، قطب ارتفاعی آن، M، نقطه برخورد s(§۶۹۳) با عمودی است که از X، نقطهٔ برخورد m و AA_1، بر BC رسم می‌شود.

۶۹۷. قضیه. اگر خطی دایرهٔ محیطی مثلث را قطع کند، آنگاه خطوط سیمسون نقاط برخورد آن با دایره یکدیگر را در قطب ارتفاعی آن خط نسبت به مثلث قطع می‌کنند.

فرض کنید m دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC را در Q و Q' قطع کند (شکل ۱۵۵) و عمود QL که از Q بر BC رسم می‌شود (O) را در K و خط IA را، که از A_1 موازی با BC رسم می‌شود، در I قطع کند.

با در نظر گرفتن دو چهار ضلعی محاطی A_1XQI و AA_1KQ، داریم

$$\angle IXA_1 = \angle IQA_1 = \angle KQA_1 = \angle KAA_1$$

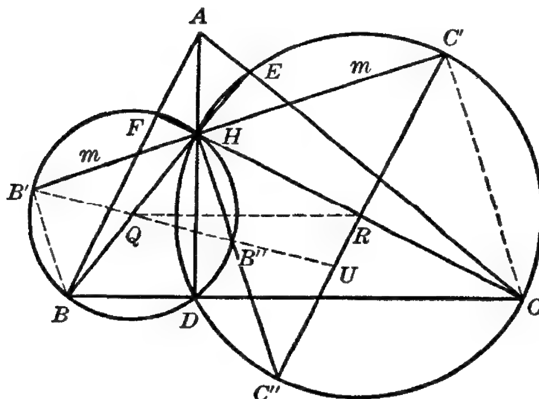
پس XI با AK موازی است.

از طرف دیگر، پاره‌خطهای XM و LI با A_1U موازی و برابرند، و LM با XI موازی است؛ پس LM خط سیمسون Q است (§۲۸۹). برای Q' نیز مطلب مشابهی صادق است، پس قضیه ثابت می‌شود.

۶۹۸. نتیجه. نقاط فوئرباخ یک مثلث قطبهای ارتفاعی قطرهایی از دایرهٔ محیطی هستند که از مراکز سه مماس می‌گذرند (§۶۴۸).

۶۹۹. قضیه. اگر یک خط از مرکز ارتفاعی مثلث بگذرد، متقارن قطب ارتفاعی آن خط نسبت به آن خط روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث قرار دارد.

فرض کنید B' و C'، تصاویر رأسهای B و C از مثلث ABC (شکل ۱۵۶) روی خط $m = B'HC'$ باشند، که از مرکز ارتفاعی مثلث، H، می‌گذرد. B' و C' روی دایره‌های (Q) و (R) که BH و CH قطرشان هستند، قرار دارند. اگر M قطب ارتفاعی m باشد، خطوط $B'M$ و $C'M$ بر AC و AB عمودند (§۶۸۹) و بنابراین، به ترتیب با BH و CH موازی‌اند، یعنی $B'M$ و $C'M$ متقارنهای $B'Q$ و $C'R$ نسبت به خط m هستند (Q و R مراکز دایره‌های (Q) و (R) هستند).



شکل ۱۵۶

حال نشان می‌دهیم که نقطهٔ $U = (B'Q, C'R)$ روی دایرهٔ نه نقطهٔ (N) از مثلث ABC قرار دارد. اگر B'' روبروی قطری B' در (Q)، و C'' روبروی قطری C' در (R) باشند، آنگاه B'' و C'' روی خطی که از H بر m عمود می‌شود قرار دارند، و داریم

$$\begin{aligned}\angle QUR &= \angle B''UR = \angle UC''B'' + \angle UB''C'' = \angle UC''B'' + \angle QB''H \\ &= \angle RC''H + \angle QB''H = \angle RHC'' + \angle QHB'' = \angle QHR = \angle QDR\end{aligned}$$

پس چهار نقطهٔ U، D، Q، و R همدایره‌اند. D پای ارتفاع AD است و نقاط اویلر Q و R روی دایرهٔ نه نقطهٔ (N) از مثلث ABC قرار دارند؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

تمرین

۱) نشان دهید که مرکز ارتفاعی مثلث، قطب ارتفاعی اضلاع مثلث، نسبت به مثلث است.

۲) رأسهای مثلث ABC را روی خط مفروض m تصویر می‌کنیم و از تصویرها خطوطی موازی اضلاع متناظر ABC رسم می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ حاصل شود. نشان دهید که قطب ارتفاعی m نسبت به ABC با A'، B'، و C' همدایره است.

۳) M، قطب ارتفاعی خط m نسبت به مثلث ABC، و M_1 قطب ارتفاعی m نسبت به مثلث میانک آن، یعنی $A_1B_1C_1$ است. خطی که از M و M_1 می‌گذرد، m را در نقطهٔ G' قطع می‌کند به‌طوری که $MG' = 2G'M_1$. نشان دهید که C' تصویر G مرکز ثقل مثلث ABC، بر m است.

۴) A'، B'، و C' تصاویر رأسهای مثلث ABC روی خط مفروضی هستند. نشان دهید عمودهایی که از نقاط وسط پاره‌خطهای $B'C'$، $C'A'$، و $A'B'$ بر اضلاع BC، CA و AB از مثلث رسم می‌شوند همرس‌اند.

۵) نشان دهید که (الف) فاصلهٔ بین قطبهای ارتفاعی دو نیمساز یک زاویهٔ مثلث، با قطر دایرهٔ محیطی مثلث برابر است؛ (ب) اگر وتر PQ از دایرهٔ محیطی مثلث ABC بر BC عمود باشد، فاصلهٔ بین قطبهای ارتفاعی خطوط AP و AQ با PQ برابر است.

۶) نشان دهید که قطب ارتفاعی یک خط نسبت به یک مثلث عبارت است از مرکز اصلی سه دایرهٔ مماس بر آن خط، که مرکزهایشان رأسهای مثلث پادمکمل مثلث مفروض هستند.

تمرینهای تکمیلی

۱) P و Q دو نقطهٔ مزدوج همزاویهٔ دلخواه نسبت به‌مثلث ABC هستند. اگر AQ دایرهٔ محیطی را در O و OP ضلع BC را در R قطع کند، نشان دهید که QR با AP موازی است.

۲) اگر O و G مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ثقل مثلث ABC، و O_a، O_b، و O_c مراکز دایره‌های محیطی مثلثهای GBC، GCA و GAB باشند، نشان دهید که نقاط O و G به‌ترتیب مرکز ثقل و نقطهٔ لوموان مثلث $O_aO_bO_c$ هستند.

۳) اگر در مثلث ABC، $B'C'$ با BC پادموازی باشد و از پای میانهٔ متقارن رسم شده از A بگذرد، نشان دهید که خط قطبی A نسبت به دایره‌ای که BC قطر آن‌است، از مراکز ارتفاعی مثلثهای ABC و $AB'C'$ می‌گذرد.

۴) DEF مثلث ارتفاعی مثلث ABC، و X، Y، و Z تصاویر نقطهٔ لوموان K روی اضلاع BC، CA، و AB، و X'، Y'، Z' متقارنهای X و Y و Z نسبت به K هستند، نشان دهید که X'، Y'، و Z' نقاط لوموان مثلثهای AEF، BFD، و CDE هستند.

۵) دایرهٔ محیطی و مرکز ثقل یک مثلث متغیر ثابت هستند. نشان دهید که مکان هندسی نقطهٔ لوموان مثلث یک دایره است.

۶) دایرهٔ محیطی و نقطهٔ لوموان یک مثلث متغیر ثابت هستند. نشان دهید که مکان هندسی مرکز ثقل مثلث یک دایره است.

۷) P و P' دو نقطهٔ مزدوج همزاویه، و Q و Q' نیز دو نقطهٔ مزدوج همزاویه هستند. نشان دهید که نقاط $R = (PQ, P'Q')$ و $R' = (PQ', P'Q)$ نیز مزدوج همزاویه‌اند.

۸) نشان دهید که مزدوج همزاویهٔ نقطهٔ ناگل با مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی همخط است.

۹) نشان دهید که موربهای معکوس دو قطر عمود بر هم دایرهٔ محیطی یک مثلث یکدیگر را روی خط قطبی مرکز دایرهٔ محیطی نسبت به دایرهٔ نه نقطه، قطع می‌کنند.

۱۰) نشان دهید که متقارن یک رأس مثلث هم‌میانهٔ متقارن مثلث ABC نسبت به ضلع متناظر مثلث ABC، مزدوج همزاویهٔ پای عمودی است که از مرکز دایرهٔ محیطی بر میانهٔ متقارن در نظر گرفته شده رسم می‌شود.

۱۱) از مثلثی محل نقاط برخورد میانه‌ها با دایرهٔ محیطی مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱۲) مثلثی را که محل مثلث دوم بروکار آن مفروض است، رسم کنید.

۱۳) متقارنهای نقاط برخورد میانه‌ها بادایرهٔ محیطی نسبت به اضلاع متناظرشان رأسهای یک مثلث هستند. نشان دهید که این مثلث با مثلث دوم بروکار مثلث مفروض متجانس است.

۱۴) نشان دهید خطوطی که رأسهای متناظر دو مثلث بروکار مثلث مفروضی را به هم وصل می‌کنند، یکدیگر را در مرکز ثقل مثلث مفروض قطع می‌کنند.

۱۵) M نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ مثلث ABC است. MA، MB، و MC دایرهٔ محیطی را در A'، B'، C' قطع می‌کنند، و D، E، F تصاویر M روی BC، CA و AB هستند. نشان دهید که مثلثهای $A'B'C'$ و DEF متشابه مستقیم هستند و M در $A'B'C'$ بامزدوج همزاویهٔ M در DEF متناظر است. با استفاده از این مطلب نشان دهید که مثلثهای هم‌میانهٔ متقارنی وجود دارند که اضلاع هرکدام با میانه‌های دیگر متناسب‌اند.

۱۶) نشان دهید که مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث، مرکز ثقل مثلث پادپادک نقطهٔ لوموان مثلث مفروض است.

۱۷) نشان دهید که قطبی سه خطی نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی مثلث از نقطهٔ لوموان آن مثلث می‌گذرد.

۱۸) نشان دهید که (الف) خط واصل بین نقطهٔ لوموان و مرکز ارتفاعی مثلث از نقطهٔ لوموان مثلث ارتفاعی آن مثلث نیز می‌گذرد؛ (ب) در یک گروه مرکز ارتفاعی، چهار خطی که هر کدام از نقطهٔ لوموان و مرکز ارتفاعی یک مثلث می‌گذرد، همرس‌اند.

۱۹) A' وسط ضلع BC از مثلث ABC، نقطهٔ وسط پاره‌خط MN، که دو خط همزاویهٔ AM و AN روی خطی که از A' می‌گذرد جدا می‌کنند، نیز هست. اگر خطوط BN و CN، خط AM را در E و F قطع کنند، نشان دهید مماسهایی که در B و C بر دایره‌های ABE و ACF رسم می‌شوند یکدیگر را روی خط AN قطع می‌کنند.

۲۰) فرض کنید D و E تصویرهای رأس A از مثلث ABC روی ضلع BC و عمودمنصف ضلع BC باشند. اگر A' نقطهٔ وسط BC باشد، نشان دهید که خط DE از رأس $A_۲$ مثلث دوم بروکار می‌گذرد و $۴EA_۲ \cdot AA' = AB^۲ + AC^۲$.

۲۱) نقاط بروکار یک مثلث ثابت‌اند و اندازهٔ زاویهٔ بروکار نصف یک زاویهٔ مثلث است. نشان دهید مکان هندسی رأسهای این مثلث سه خط راست است.

۲۲) با مفروض بودن محل هر سه تایی از پنج نقطهٔ زیر می‌توان یک مثلث متساوی‌الساقین را رسم کرد: یک

رأس، مرکز ثقل، نقطهٔ لوموان، دو نقطهٔ بروکار. این کار را برای همهٔ حالتها انجام دهید.

۲۳) نقطهٔ متغیر P روی دایره‌ای هم‌مرکز با مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارد. نشان دهید که زاویهٔ بروکار مثلث پادک P نسبت به ABC ثابت است.

۲۴) نشان دهید که اگر مرکز ارتفاعی یک مثلث روی دایرهٔ بروکار باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۲۵) P، Q، R و P'، Q'، R' تصاویر نقاط بروکار روی اضلاع مثلث ABC هستند. ثابت کنید که (الف) مثلثهای PQR و $P'Q'R'$ دایرهٔ بروکار مشترکی دارند که مرکزش نقطهٔ لوموان مثلث ABC است؛ (ب) دایرهٔ اول لوموان این مثلثها نیز بر هم منطبق‌اند و این دایره با دایرهٔ دوم لوموان ABC برابر است؛ (ج) محورهای اصلی دایره‌های محیطی این سه مثلث، قطرهای بروکار آنها هستند.

۲۶) خطی که از نقطهٔ لوموان K در مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع BC و BA را نقاط D و E قطع می‌کند، به طوری که $DK = KE$، و Q نقطهٔ دوم برخورد دایرهٔ محیطی مثلث DBE با دایره‌ای است که AB قطر آن‌است. ثابت کنید که نقاط B، C، Q و یکی از نقاط بروکار ABC همدایره‌اند.

۲۷) (الف) M و M' نقاط همزاویهٔ زاویهٔ $(AQR, AQ'R')$ هستند و MQ، MR؛ $M'Q'$ و $M'R'$ عمودهایی هستند که از M و M' بر اضلاع این زاویه رسم شده‌اند. ثابت کنید که نقطهٔ $(QR', Q'R)$ روی خط MM' قرار دارد.

(ب) نشان دهید که خط واصل بین نقاط (AM, QR) و $(Q'R', AM')$ با خط MM' موازی است.

۲۸) (الف) M و M' دو نقطهٔ همزاویهٔ مثلث (T) هستند؛ نشان دهید که اضلاع مثلثهای پادک نقاط M و M' نسبت به (T)، یعنی مثلثهای PQR و $P'Q'R'$، خطوط قطبی نقاط M' و M نسبت به دایره‌های (A)، (B) و (C) هستند؛ (A)، (B) و (C) دایره‌هایی هستند که رأسهای A، B، C از مثلث (T) مراکزشان هستند و بر دایرهٔ پادک M و M' نسبت به (T) عمودند.

(ب) نشان دهید سه خطی که رأسهای A، B، و C را به ترتیب به نقاط $P_o = (QR, Q'R')$، $Q_o = (RP, R'P')$، $R_o = (PQ, P'Q')$ وصل می‌کنند، موازی‌اند.

واژه‌نامه

ارتفاع	altitude
انعکاس	inversion
پادساعتگرد	counterclockwise
پادمرکز	anticenter
پادموازی	antiparallel
پادهمتا	antihomologous
تجانس	homothecy
تحلیل	analysis
ترسیم	construction
تشابه	similitude
تقارن	symmetry
چهارضلعی محاطی	cyclic quadrilateral
دایرهٔ آپولونیوس	circle of Apollonius
دایرهٔ آپولونیوسی	Apollonian circle
دایرهٔ پایی	pedal circle
دایرهٔ قطبی	polar circle
دایرهٔ محاطی	incircle
دایرهٔ محیطی	circumcircle
دایره‌های الحاقی	adjoint circles
دایره‌های متعامد	orthogonal circles
دایره‌های هم محور	coaxal circles
دور از دسترس	inaccessible
ذوزنقه	trapezoid
ساعتگرد	clockwise
سه مماس	tritangent
شعاع دایرهٔ محاطی	inradius
شعاع دایرهٔ محیطی	circumradius
عمودمنصف	mediator
قطب	pole
قطب ارتفاعی	orthopole
قطب سه‌خطی	trilinear pole
قطر دایرهٔ محیطی	circumdiameter
قوت نقطه	power of a point

گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی	orthocentric group of triangles
متشابه مستقیم	directly similar
متشابه معکوس	inversely similar
متقارن	symmetric
متوازی‌الاضلاع	parallelogram
مثلث پادک	pedal triangle
مثلث پاد پادک	antipedal triangle
مثلث پادمکمل	anticomplementary triangle
مثلث مکمل	complementary triangle
مثلث مماسی	tangential triangle
مثلث میانک	medial triangle
مثلثهای منظری	perspective triangles
مثلثهای همتا	homologous triangles
مثلثهای هم‌میانهٔ متقارن	cosymmedian triangles
محور اصلی	radical axis
مرکز اصلی	radical center
مرکز ثقل مثلث	centeroid of a triangle
مرکز دایرهٔ محاطی	incenter
مرکز دایرهٔ محیطی	circumcenter
مزدوج	conjugate
معلومات	data
مکان هندسی	locus
نیمساز	bisector
نقاط اساسی	basic points
نقاط همپویا	isodynamic points
نقاط همدایره	concyclic points
نقاط همنوا	isotomic points
همتا	homologous
همرس	concurrent
همساز	harmonic
همنوا	isotomic
همنهشت	congruent

نمایه